УДК 532.546

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕДВИЖЕНИЯ ВЛАГИ В ГЛУБЬ ПОЧВЫ

Токтосунов Т. Т., Орозобекова А.К.
КГУСТА им. Н. Исанова

В данной статье рассматривается одномерная модель инфильтрации воды в почво-грунтах. Дано аналитическое решение задачи влагопереноса в однородных почвах, где исследовано распространение влаги в пористой среде с учётом возможного выявления двух подвижных границ фронта смачивания и границы зон раздела полного и неполного насыщения без учета гравитационных сил.

Ключевые слова: уравнение, модель, влагоперенос, аналитическое решение, инфильтрация.

ТОПУРАКТЫН ИЧИНЕ НЫМДЫН ӨТҮШ ПРОЦЕССИН МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛДӨӨ

Токтосунов Т.Т., Орозобекова А.К.
Н.Исанов ат. КМКТАУ

Бул макалада топурактагы суунун инфильтрациясынын бир өлчөмдүү модели талкууланат. Бир тектүү кыртыштарда нымдуулуктун өтүү маселесинин аналитикалык чыгарылышы келтирилген, мында нымдуу чөйрөдө нымдуулуктун таралышы изилденет, мында нымдоо фронтунун эки кыймылдуу чектерин жана нымдуулуктун бөлүнүү зоналарынын чектерин аныктоону эске алуу менен гравитациялык күчтөрдү эсепке албастан толук жана толук эмес каныккандык каралган.

Баштапкы сөздөр: теңдеме, модель, ным берүү, аналитикалык чечим, инфильтрация.

MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESS OF MOVEMENT OF MOISTURE INTO SOIL DEPTH

Toktosunov T. T., Orozobekova A. K.
KSUCTA named of N. Isanov

This article discusses a one-dimensional model of water infiltration in soils. An analytical solution to the problem of moisture transfer in homogeneous soils is given, where the propagation of moisture in a porous medium is studied, taking into account the possible identification of two moving boundaries of the wetting front and the boundary of the zones of separation of complete and incomplete saturation without taking into account gravitational forces.
Key words: equation, model, moisture transfer, analytical solution, infiltration.

Большое количество прошедших оползневых процессов, которые произошли на территории Республики показали, что основными факторами, определяющими развитие и активизацию оползневых процессов, являются процессы насыщения основной массы почв горных пород влагой как за счет подземных вод, так и за счет выпадения осадков, снеготаяния, поверхностного стока на склонах, которые и образуют процесс фильтрации и инфильтрации.

Рассмотрим условия поступления атмосферных осадков и распределения их на оползневом склоне. На склонах гор снег скапливается неравномерно, он сдувается ветром и в больших количествах оседает в различного рода углублениях. Таяние снежного покрова происходит неравномерно. Распределение дождевых вод также неравномерно и зависит от условий рельефа, способности почвогрунта задерживать или впитывать в себя воду. На крутых склонах вода обычно не задерживается и стекает в пониженные места, где и может образовывать застои и вызывать оползни. В рыхлых грунтах вода задерживается, но влияние этой воды на устойчивость склона зависит от абсолютного количества выпадающих осадков. Еще следует отметить, что вскапывание и рыхление почвы в некоторых случаях могут привести к чрезмерному увлажнению пород и в связи с этим - к нежелательным оползневым явлениям.

Следовательно, воздействие вышеуказанных важнейших факторов природы, сводится в конечном счете, к взаимодействии системы «грунт-вода». Известно, это чрезвычайно сложная система, для исследования которой, используется теория и методы гидродинамики. Под воздействием климатических, гидрогеологических, метеорологических, гидрологических условий, стока поверхностных вод, снеготаяния, сезонного оттаивания происходит проникновение влаги или движения жидкости в водопроницаемых оползневых горных склонах. Именно такие гидродинамические процессы и явления в горных склонах подлежат дальнейшему аналитическому исследованию с помощью разработанных математических моделей движения влаги в почвогрунтах.

На территории Кыргызстана наиболее распространены оползни гидродинамического происхождения. На возникновение, развитие, активизацию и механизм данных типов оползни большое влияние оказывают процессы, связанные с динамикой жидкости в оползневых склонах (колебания уровней подземных вод, процессы фильтрации жидкости в склонах, инфильтрации воды в горных склонах, влагопереноса и.т.д.).

Таким образом, на первый план вступают проблемы и задачи, связанные гидродинамическими процессами в оползневых склонах и вопросы устойчивости горных склонов к оползанию.

Следовательно, моделируя различные типы фильтрационных и инфильтрационных течений жидкости в различных грунтах при определенных упрощающих физико-механических допущениях, применяя современный математический аппарат (на первой стадии), можем дать количественную и качественную оценку происходящих на склонах процессов и получить новые научные результаты о развитии и активизации оползней.

На основе всего вышеуказанного, можно составить основные уравнения движения жидкости в почвогрунтах (в пористых средах), на общеизвестных законах гидродинамики, сформулировать вспомогательные данные в виде начальных и граничных условий.

Основные свойства модели жидкости, как сплошной среды -— достаточны, чтобы установить уравнения движения жидкости. Для более глубокого анализа, необходимы дальнейшие качественные и количественные уточнения, более детально отображающие свойства механических движений рассматриваемой среды, процессов переноса жидкости и вещества в них.

В зависимости от характера исследуемой проблемы будем иметь дело с моделью жидкой среды. Все многие широко применяемые на практике жидкости являются ньютоновскими вязкими средами. В классической гидродинамике наибольшее внимание уделяется исследованию течения несжимаемой жидкости без трения. Опыты показывают, что сжатие и расширение жидкости сопровождаются изменением температуры. Следовательно, изучение течения сжимаемой жидкости должно основываться на термодинамическом анализе и механике сплошных сред.

Математическое описание жидкой среды базируется на известных законах сохранения количества движения (импульса), массы и энергии, а также уравнения состояния данной среды. Одним из уравнений движения динамики сжимаемой вязкой жидкости является уравнение состояния, связывающее давление P, плотность ρ и температуру T рассматриваемой жидкости, которую можно записать в общем виде

$$P = F(\rho, T). \qquad (1)$$

Вторым основным уравнением является уравнение неразрывности, базирующееся на законе сохранения массы. Масса жидкости, вытекающая из этого прямоугольника в направлении оси x, может быть представлена в виде

$$\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dy - \rho u dy = \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy \quad (2)$$

Аналогичное выражение можно написать для массы жидкости, вытекающей из прямоугольника в направлении оси y.

Общее количество жидкости вытекающей из прямоугольника, будет равно

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y}\right) dx dy \quad (3)$$

Согласно закону сохранения массы, выражение (3) должно быть равно скорости уменьшения массы в прямоугольнике. Следовательно, имеем

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y}\right) dx dy = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

или в векторной форме уравнение неразрывности (4) имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (5)$$

где $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j}$ - вектор скорости.

В случае плоского или осесимметричного установившегося течения, уравнение неразрывности записывается в виде

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \delta \frac{\rho v}{y} = 0, \quad (6)$$

где $\delta = 0$ для двумерного и $\delta = 1$ для осесимметричного случаев.

Если жидкость несжимаемая, то $\rho = \mathrm{const}$ и уравнение неразрывности (5) принимает более простой вид $\mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0$ (7)

Следующими двумя уравнениями являются уравнения движения, которые являются следствием закона сохранения импульса, и определяют компоненты скоростей u и v. Тогда уравнения движения в векторной форме имеет вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{P} \quad (8)$$

где $$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\,\mathrm{grad}\,\vec{v} \quad (9)$$

субстанциальная производная скорости. Массовые и поверхностные силы $\vec{F}$ и $\vec{P}$ выражаются через свои проекции на координатные оси следующим образом

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}, \qquad \vec{P} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} \tag{10}$$

где X, У - проекции массовых сил, отнесенные к единице массы данного объема. Для двумерного потока, состояние движущейся жидкости в любой среде, в частности, в пористых средах, описывается при помощи трех гидродинамических величин: компонент скоростей u, v и давления P. Таким образом, полная система гидродинамических уравнений должна состоять из трех уравнений. Одним их них является уравнение неразрывности, а два уравнения для компонент скоростей дают уравнения Навье – Стокса. Если градиент температуры и давления малы, то плотность жидкости и ее вязкость считаются постоянными. В этом случае, для отдельных частиц жидкости можно выписать следующие уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\nabla u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\nabla v \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

где $\nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа.

Если движение жидкости стационарное, имеем следующую систему уравнений

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\nabla u$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\nabla v \tag{12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Компоненты вектора расхода Q можно найти по формуле $Q_x = \sigma u, \quad Q_y = \sigma v$, где σ - пористость грунта.

Движение почвенной влаги подчиняется общей физической закономерности ненасыщенной фильтрации в пористых средах. Законы ненасыщенного движения воды в почвах весьма сложны и недостаточно еще изучены.

Если происходит впитывание воды в ненасыщенную почву, то скорость потока жидкости можно считать пренебрежимо малой, и тогда удобно описать влажностное состояние почвы не компонентами средней скорости «u» и «v» жидкости, а некоторой безразмерной величиной

$W(x,y,t)$-влажность. В этом случае, перенос влаги в почве складывается из суммарных переносов капиллярного и гравитационного переносов.

Случай инфильтрации воды в почву, то есть процесс впитывания, и дальнейшее передвижение влаги при отсутствии гравитационных сил описывается одномерным нелинейным уравнением диффузии

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Д(W)\frac{\partial W}{\partial x}\right) \qquad (13)$$

где $Д(W)$ - коэффициент диффузии, x – горизонтальная координата, t – время. Другое уравнение моделирует движение воды в горизонтальном направлении.

$$C(P,x)\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K\frac{\partial P}{\partial x} + K\right], \qquad (14)$$

где $C(P,x) = \frac{\partial W}{\partial P}$, $P = -(M+L)$, M–суммарный капиллярно–гравитационный потенциал, P–капиллярное давление, K–коэффициент влагопроводности, $K\frac{\partial P}{\partial W} = Д$ - коэффициент диффузивности, L–глубина.

В другой работе, исходным уравнением влагопереноса является уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[KC\frac{\partial W}{\partial x} + K\right], \qquad (15)$$

где $C = \frac{\partial P}{\partial W}$, K=K(W) (16)

Одномерное уравнение влагопереноса, учитывающее как капиллярные, так и гравитационные силы имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Д(W)\frac{\partial W}{\partial x}\right) + \frac{\partial K}{\partial x} \qquad (17)$$

Почва рассматривается как полубесконечная однородная изотропная пористая среда с неподвижным скелетом. Начальная влажность предполагается постоянной по глубине. Поэтому, следует отметить, что градиенты давления, существующие в почве в начальный момент, могут вызвать лишь пренебрежимо малое движение влаги.

Однако, поток, просачиваемый с поверхности земли, должен подчиняться закону Дарси и уравнению непрерывности. В дополнении предполагается, что в течении всего процесса инфильтрации влагосодержание в любой фиксированной точке либо увеличивается со временем, либо остается постоянным. Этого предположения достаточно для того, чтобы рассматривать гидравлическую проводимость и капиллярное давление как однозначные функции влажности почвы.

При указанных предположениях, имеет место закон Дарси относительно скорости фильтрации и влагосодержания для ненасыщенной почвы $v=-Д(W)\frac{\partial W}{\partial y}+K(W)$ (18)

Тогда для описания процесса инфильтрации воды в зоне аэрации будет справедливым следующее двумерное уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(Д(W)\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(Д(W)\frac{\partial W}{\partial y}-K(W)\right) \quad (19)$$

Движение по склону состоит из нескольких взаимосвязанных друг с другом процессов: движение воды по склону, впитывание ее в почву, изменение контура увлажнения почвы.

На впитывание воды в почву и просачивание ее в почво-грунт влияют такие факторы, как механический состав почвы, водопроницаемость, форма склона, уклон местности, глубина наполнения и т.д.

Задача состоит в определении характера изменения во времени скорости впитывания воды в почвогрунт, так как на основе этого можно установить равномерность увлажнения.

Одномерная модель инфильтрации воды в почво- грунтах

Движение воды в капиллярно-пористых средах, к каковым относятся почвы, происходит под действием самых разнообразных движущих сил представляющих: градиент давления, потенциала гравитационного поля, потенциала электрического поля, температуры, концентрации растворенных веществ и. т. д.

Как правило, впитывание есть процесс поступления воды с поверхности почвы в ненасыщенную среду. Считается, что сам процесс состоит из двух фаз: а) восприятие воды почвой; б) движение воды в почве в её толще от слоя к слою.

Существенной особенностью процесса впитывания является то, что ниже промоченной толщи имеется относительно сухая толща или прослойка, насыщенная водой. Даже, если впитывание происходит с поверхности почве, однородной по профилю в отношении физических свойств, то и в этом случае движение влаги при впитывании носит ярко выраженный неустановившийся характер.

Наиболее полный характер исследования по одномерной инфильтрации имеется в классической работе Дж. Филиппа , в которой даётся детальный анализ процесса горизонтального впитывания в однородный грунт, доказано существование решения уравнения влагопереноса с учётом капиллярных и гравитационных сил в виде ряда по различным степеням t с коэффициентами зависящими от влажности.

Попытки аналитического решения задачи влагопереноса в однородных почвах предприняты в работе, где исследовано распространение влаги в пористой среде с учётом возможного выявления двух подвижных границ фронта смачивания и границы зон раздела полного и неполного насыщения. Однако считается, что действием гравитационных сил иногда можно пренебречь. Тогда уравнение влагопереноса, без учета гравитационных сил для одномерного случая записывается в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Д(W)\frac{\partial W}{\partial x}\right) \qquad (20)$$

где Д(W)- коэффициент диффузии, x - вертикальная координата, t – время.

Для уравнения (20) можно сформулировать следующую начально - краевую задачу:

при $x > 0$, $t = 0$ $\qquad W(x,0) = H_0$ $\qquad$ (21)

при $x = 0$, $t > 0$ $\qquad W(0,t) = H_1$. $\qquad$ (22)

Условиям (21)- (22) соответствует следующая физическая картина: начальная влажность постоянна и равна некоторой константе H_0 , на верхней границе поддерживается постоянная влажность H_1, которая фактически равна максимальной влагоемкости почвы.

Уравнение (21) с начально-краевыми условиями (21)-(22) описывает процесс впитывания влаги в почву, когда на поверхности поддерживается некоторый напор воды (имеется избыток жидкости на поверхности) с неизвестной границей фронта увлажнения.

Так как уравнение (20) является нелинейным, аппроксимируем коэффициент диффузии следующим степенным рядом

$$Д(W) = Д_0 + Д_1 W + Д_2 W^2 + Д_3 W^3 + \ldots, \qquad (23)$$

где $Д_0$, $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$, …- коэффициенты разложения.

Решение исходной задачи будем искать в виде следующего ряда

$$W = \varepsilon^n W_0 + \varepsilon^{n+1} W_1 + \varepsilon^{n+2} W_2 + \ldots , \qquad (24)$$

где W_0 , W_1 , W_2 , … - неизвестные функции, ε - малый параметр, равный некоторому условному значению коэффициента диффузии $Д^*$ по отношению к реальному коэффициенту диффузии Д; n - пока произвольный параметр разложения.

Подстановка (23) - (24) в исходное уравнение (20) дает систему рекуррентных линейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций W_0, W_1, W_2,…:

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} - Д_0 \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} = 0 \qquad (25)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} - Д_0 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} = Д_1\left[W_0 \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial W_0}{\partial x}\right)^2\right] \qquad (26)$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} - Д_0 \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} = Д_1 W_0 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \left(Д_1 W_1 + Д_2 W_0^{\,2}\right)\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} +$$

$$+2Д_2W_0\left(\frac{\partial W_0}{\partial x}\right)^2+2Д_1\frac{\partial W_0}{\partial x}\frac{\partial W_1}{\partial x} \quad (27)$$

………………………………………………………………………………………

$$\frac{\partial W_n}{\partial t}-Д_0\frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2}=L(W_0, W_1, ..., W_{n-1}) \quad (28)$$

Здесь $L(W_0, W_1, …, W_{n-1})$ - дифференциальный оператор, зависящий от предыдущих приближений.

Так как у всех приближений однородные части идентичны, то будем искать решения для уравнения нулевого приближения (25), а частные решения неоднородной части следующих приближений не составляет особых трудностей – они находятся методом неопределенных коэффициентов.

Для удобства нахождения решений уравнения (25) введем новые величины $\bar{x}\to\sqrt{Д_0}x$, $\bar{t}\to t$, $u\to W_0$ (для удобства черточки над переменными опускаем). Тогда, уравнение примет наиболее простой вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (29)$$

Уравнение (29) является уравнением параболического типа, которое описывает процесс инфильтрации воды в почво- грунтах, при отсутствии гравитационных сил.

В данной части, при исследовании этого уравнения, решение будем искать в виде специальным образом выбранных выражений, при котором уравнение (29) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение того же порядка. Причем неизвестные функции все зависят друг от друга и вынуждают исходное уравнение превращаться в обыкновенное.

I.Предположим, что существует решение уравнения (29) в виде

$$u(x,t)=f_0(x)\cdot f_1(z)+f_2(x)\cdot f_3(t), \quad z=bx+t \quad (30)$$

Как будет далее указано, данное решение содержит в себе множество частных решений. С учетом (30) исследуемое уравнение (29) перепишется в виде

$$f_1''(z)+\left[2\frac{f_0'(x)}{f_0(x)}-b\right]f_1'(z)+\frac{f_0''(x)}{f_0(x)}f_1(z)+\frac{f_2''(x)}{f_0(x)}f_3(t)-\frac{f_2(x)}{f_0(x)}f_3'(t)=0 \quad (31)$$

только в случае, когда $f_3(t)=\exp(b_1 t)$, (32)

а также из того, что последние два члена, записанные в виде

$$f_2''(x)=b_1 f_2(x)$$

имеют решения при различных значениях b_1

а) $f_2(x)=C_0\exp(\sqrt{b_1}x)+C_1\exp(-\sqrt{b_1}x)$, $b_1>0$ (33)

б) $f_2(x) = C_0\cos\sqrt{b_1}\,x + C_1\sin\sqrt{b_1}\,x$, $b_1 < 0$ (34)

в) $f_2(x) = C_0 x + C_1$, $b_1 = 0$ (35)

Только при $f_0(x) = \exp(ax)$ (36)

уравнение (12), окончательно запишется

$$b^2 f_1''(z) + (2ab - 1)f_1'(z) + a^2 f_1(z) = 0 \quad (37)$$

которое, является обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет следующие корни (при $b \neq 0$)

$$\lambda_{1,2} = \frac{(1-2ab) \pm \sqrt{1-4ab}}{2b^2}$$

Здесь возможны три случая:

а) корни действительные и различные, то есть $1 - 4ab = n^2$, где $n > 0$. Тогда $\lambda_{1,2} = \frac{(n \pm 1)^2}{2b^2}$, а общее решение (37) имеет вид

$$f_1(z) = C_2 \exp\lambda_1 z + C_3 \exp\lambda_2 z \quad (38)$$

Например, при $b = -2$, $a = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/4$ искомая функция запишется

$$u(x,t) = C_2 \exp(-x + t) + C_3 \exp\frac{2x + t}{4} + f_2(x) \cdot \exp b_1 t$$

$$W(x,t) = C_2 \exp\left(-\sqrt{Д_0}\,x + t\right) + C_3 \exp\frac{2\sqrt{Д_0}\,x + t}{4} + f_2(x) \cdot \exp b_1 t \quad (39)$$

б) корни характеристического уравнения вещественны и равны (кратны), то есть $1-4ab=0$. В этом случае $\lambda_{1,2} = \frac{1}{4b^2}$, при $b = 1/(4a)$ $(a \neq 0)$, $\lambda_{1,2} = 4a^2$ имеем $f_1(z) = \exp(4a^2 z)(C_2 + C_3 z)$ (40)

$$u(x,t) = C_2 \exp(2ax + 4a^2 t)\left[C_2 + C_3 t + \frac{C_3 x}{4a}\right] + f_2(x) \cdot \exp b_1 t$$

$$W(x,t) = C_2 \exp\left(2a\sqrt{Д_0}\,x + 4a^2 t\right)\left[C_2 + C_3 t + \frac{C_3\sqrt{Д_0}\,x}{4a}\right] + f_2(x) \cdot \exp b_1 t \quad (41)$$

в) корни характеристического уравнения комплексные, т.е. $1 - 4ab = -k^2$, где к > 0. Тогда $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, где $\alpha = (1 - k^2)/4b^2$, $\beta = k/2b^2$. В этом случае

$$f_1(z) = \exp(\alpha z)(C_2 \cos\beta z + C_3 \sin\beta z) \quad (42)$$

Для последнего случая рассмотрим два параметра:

1. если $b = 1/2a$, тогда $\lambda_{1,2} = \pm 2a^2 i$ и величина $f_1(z)$ запишется

$$f_1(z) = c_2\cos 2a^2z + c_3\sin 2a^2z \qquad (43)$$

Тогда, сама искомая функция u(x,t) примет вид

$$u(x,t) = e^{ax}\left[c_2\cos\left(ax + 2a^2t\right) + c_3\sin\left(ax + 2a^2t\right) + f_2(x)e^{b,t}\right] \qquad (44)$$

$$W_0(x,t) = e^{a\sqrt{Д_0}x}\left[c_2\cos\left(a\sqrt{Д_0}x + 2a^2t\right) + c_3\sin\left(a\sqrt{Д_0}x + 2a^2t\right) + f_2(x)e^{b,t}\right] \qquad (45)$$

2. если b = 3a, $\lambda_{1,2} = \left(1 + i\sqrt{3}\right)a/2$, то

$$f_1(z) = e^{\frac{az}{2}}\left[c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}az + c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}az\right] \qquad (46)$$

В этом случае, искомая функция u(x,t) запишется

$$u(x,t) = e^{\frac{3}{2}(x+t)}\left[c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}a\left(3ax + t\right) + c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}a\left(3ax + t\right) + f_2(x)e^{b,t}\right] \qquad (47)$$

Надо заметить, что во всех случаях решения $f_2(x)$ зависят от значения величины b_1.

Таким образом, решения уравнения (30) определен в форме (31), который в свою очередь определяет класс решений, выражающийся в виде плоской волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Варнес Д. Дж. Движение склонов, типы и процессы. /Оползни, исследования и укрепления. –М.: Мир,1981,32-85с
2. Герсеванов Н. М., Польшин Д. Е. Теоретические основы механики грунтов и их практическое применение. –М.: Госстройиздат, 1948, - 247 с.
3. Бийбосунов Б.И. Моделирование и решение оптимизационных задач напорной фильтрации при сложном строении грунта. Бишкек: Илим, 1998 г. – 115 с.
4. «Аналитические методы решения коэффициента устойчивости горных склонов» Сборник «Современные проблемы механики сплошных сред/ Гидрогазодинамика и экзогенно-геологические процессы природы» вып.6, Бишкек, 2007., с.63-72. Бийбосунов А.И., Орозобекова А.К., Ташиев А.А.
5. Бийбосунов А. И. «Методы прикладной механики и информационных технологий для расчёта оползней и селей в Кыргызстане», Бишкек, 2003 г. Монография.