УДК 517. 977.5. 928.2

АЛГОРИТМ БУНЕМАНА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТОМ КАНАЛЕ ЗАКРУГЛЕННОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ОСЬЮ

Токтакунов[1] Т., Осмонов[2] К.Т.
[1]КГУ им. И. Арабаева, [2]КГТУ им. И. Раззакова

В статье рассматривается трехмерный турбулентный модель течения вязкой жидкости в открытом цилиндрически закругленном канале прямоугольного поперечного сечения. На стенках и около стенок канала ставятся условия: прилипания; ламинарного и турбулентного слоев; в продольном участке оси течения - условие периодичности; на свободной поверхности – нулевое касательное напряжение. Для решения задачи используется косинусоидальная спектральная функция по вертикальной координате и схема предиктор-корректор метода дробных шагов по горизонтальным координатам. При изопериметрических данных в схеме корректора используется алгоритм Бунемана.

Ключевые слова: трехмерный турбулентный численный модель, цилиндрически закругленный канал, число Рейнольдса, ламинарный и турбулентный слои, метод дробных шагов, алгоритм Бунемана, касательное напряжение, спектральная функция, изопериметрический параметр, «почти» трех-диагональная матрица.

УЗАТАСЫНЫН ОГУ АЙЛАНА КЕТКЕН АЧЫК КАНАЛДАГЫ ИЛЭЭШКЕК СУЮКТУКТУН АГУУСУНУН ҮЧ ӨЛЧӨМДҮҮ МАСЕЛЕСИН САНДЫК ЧЕЧҮҮ ҮЧҮН БУНЕМАНДЫН АЛГОРИТМИ

Токтакунов[1] Т., Осмонов[2] К.Т.
[1]И.Арабаев ат. КМУ, [2]И.Раззаков ат. КМТУ

Макалада, ачык тик бурчтуктуу кесилиштүү болгон каналдагы илээшкек суюктуктун үч өлчөмдүү турбуленттик агуусунун модели каралат.

Каналдын дубалчасында жана дубалчанын жанында жабышуу, ламинардык жана турбуленттик катмарлар шарттары, агуунун узата огу боюнча – мезгилдүүлүк шарты, эркин бетинде – нөлдүк жанымалык чыңалуу шарты коюлат. Маселени чыгаруу үчүн вертикалдык багыт боюнча косинусоидалык спектралдык функциясы жана горизонталдык координаттар боюнча бөлчөктүү кадамдар методунун предиктор-корректор схемасы колдонулат. Изопериметрлик маанилерде корректор схемасында Бунеман алгоритми колдонулат.

Баштапкы сөздөр: үч өлчөмдүү турбуленттик сандык модель, цилиндрдик ийриленген канал, Рейнольдс саны, ламинардык жана турбуленттик катмарлар, бөлчөктүү кадамдар методу, Бунеман алгоритми, жаныма чыңалуусу, спектралдык функция, изопериметрлик параметр, “дээрлик” үч-диагоналдуу матрица.

BUNEMAN ALGORITHM FOR NUMERICAL SOLUTION OF A THREE-DIMENSIONAL VISCOUS FLOW PROBLEM IN AN OPEN CHANNEL WITH A ROUNDED LONGITUDINAL AXIS

Toktakunov[1] T., Osmonov[2] K.T.
[1]KSTU n.a. I. Razzakov, [2]KSU n.a. I. Arabayev

The article considers a three-dimensional turbulent model of the flow of a viscous liquid in an open cylindrical channel with a rectangular cross-section. The following conditions are imposed on the walls and near the walls of the channel: adhesion; laminar and turbulent layers; periodicity condition in the longitudinal section of the flow axis; and zero tangential stress on the free surface. To solve the problem, a cosine spectral function is used for the vertical coordinate, and a predictor-corrector method is used for the horizontal coordinates. For isoperimetric data, the Buneman algorithm is used in the corrector scheme.

***Keywords**:* three-dimensional turbulent numerical model, cylindrical rounded channel, Reynolds number, laminar and turbulent layers, fractional step method, Buneman algorithm, tangential stress, spectral function, isoperimetric parameter, "almost" three-diagonal matrix.

Широкий размах строительства оросительных систем, использования рек, промышленного и сельскохозяйственного водоснабжения требует глубокой разработки ряда научных проблем в гидравлике и гидродинамике открытых каналов и русел. Одним из важных вопросов является движение воды и формирование русла в потоке, имеющим непрямолинейное очертание в плане. Благодаря кривизне граничных поверхностей плановую кривизны постепенно получат не только крайние струйки потока, непосредственно примыкающие к стенкам, но и струи, расположенные вдали от стенок. Результатом планового искривления струй является возникновение поперечного уклона свободной поверхности. Чтобы приближенно оценить величину этого уклона I_r, выделяя элемент жидкости, основание столбика которого *dr* и $rd\theta$, где *r* – радиус, θ - центральный угол закругления канала. В проекции на вертикальную плоскость, проходящую через ось закругления, на выделенный элемент жидкости действуют следующие силы: 1) центробежная $R_ц$; 2) разность давлений на боковые стенки канала ΔP ; 3) реакция трения выделенного столбика о дно потока $T_r = \tau_{r_0} rd\theta dr$. Из условия равновесия этих трех сил:

$$R_ц - \Delta P + T_r = \alpha_0 \frac{\vartheta_{r_{cp}}}{r} \rho r dr d\theta h - rd\theta dr \rho g h \frac{dh}{dr} + \tau_{r_0} rd\theta dr = 0 \qquad (1)$$

находится

$$I_r = \frac{dh}{dr} = \alpha_0 \frac{\vartheta_{r_{cp}}}{gr} + \frac{\tau_{r_0}}{\rho g h}, \qquad (2)$$

где $\vartheta_{r_{cp}}$ - средняя скорость; *h* – глубина потока; ρ - плотность жидкости; α_0 - коэффициент осреднения неравномерности распределения скоростей по вертикали; *g* - ускорение силы тяжести; τ_{r_0} - радиальное напряжение трения у дна. Эта реакция направлена от центра закругления в сторону вогнутого берега.

Предлагаются трехмерные численные модели, где неизвестные переменные разлагаются в ряды косинуса, показывающие разделение переменных в вертикальном направлении. Рассмотрение достаточно большого в осевом направлении канала снимает вопрос о краевых условиях на входе и выходе конечного канала, что сильно усложняет задачу решения уравнений Навье – Стокса в осредненных величинах, которые записываются наподобие тороидальной системы координат спиралевидного криволинейного канала прямоугольной формы сечения [3, 6].

Упрощение уравнения движения можно произвести в случае руслового потока, у которого глубина значительно меньше радиуса закругления. Для широкого потока отношение глубины *h* к радиусу закругления *r* = *L* + *b* - величины малые, где *L* – расстояние от системы отсчета до внутренней боковой стенки; *b* – расстояние от внутренней до внешней боковой стенки канала.

При таком предположении уравнение по вертикали

$$\frac{\partial \vartheta_z}{\partial t} + \vartheta_r \frac{\partial \vartheta_z}{\partial r} + \vartheta_\theta \frac{\partial \vartheta_z}{r\partial \theta} + \vartheta_z \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}(A_h \frac{\partial \vartheta_z}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_h \frac{\partial \vartheta_z}{\partial \theta}) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}(A_v \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z}) + \frac{1}{r} A_h \frac{\partial \vartheta_z}{\partial r}, \quad (3)$$

с погрешностью *h/r* для безнапорного потока со свободной поверхностью распределение давления становится гидростатическим приближением:

$$p = \rho g(\zeta - z), \quad (3')$$

здесь предполагается, что атмосферное давление на свободной поверхности равно нулю, $\vartheta_r, \vartheta_\theta, \vartheta_z$ - компоненты скоростей по направлениям цилиндрических координат *r*, θ, *z* точки; p - давление; A_v и A_h - вертикальный и горизонтально-продольный коэффициенты турбулентной вязкости; ζ - уровень свободной поверхности жидкости над плоскостью *r*, *r*θ.

Интегрируя уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} + \frac{\vartheta_r}{r} + \frac{\partial \vartheta_\theta}{r\partial \theta} + \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

от дна (*z* = 0) до произвольной глубины жидкости z, получим

$$\vartheta_z = -\frac{\partial}{\partial r}\int_0^z \vartheta_r dS - \frac{1}{r}\int_0^z \vartheta_r dS - \frac{\partial}{r\partial \theta}\int_0^z \vartheta_\theta dS . \quad (4')$$

В работе [3] отмечается, что поперечная компонента скорости частиц насколько мала, что вертикальная компонента скорости движения точек поверхности совпадает с производной по времени от смещения ζ:

$$\vartheta_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (5)$$

Подставляя ($4'$) в уравнения движения по горизонтальным направлениям *r*, *r*θ как в [6], интегрируя уравнение (3) от дна жидкости до свободной поверхности ζ, используя условие (5), получаем квази-трехмерные уравнения модели с тремя неизвестными ϑ_θ, ϑ_r, ζ, которых укажем ниже в безразмерных величинах.

Коэффициент турбулентной вязкости оценивается из формулы:

$$A_h = K_h \cdot \vartheta_{\theta *} \cdot d = K_h \cdot \ n_{\text{sh}} (\overline{\vartheta_\theta}^2 + \overline{\vartheta_r}^2)^{1/2} \ \cdot d^{5/6}, \qquad A_v = {k_v}/{k_h} \ A_h, \tag{6}$$

которая получается согласно [3, 4] путем выравнивания турбулентной вязкости с турбулентной диффузией, в которой $\overline{\vartheta_\theta}$ и $\overline{\vartheta_r}$ - компоненты вертикально осредненной скорости по θ и r; n_{sh} - коэффициент шероховатости Маннинга; K_h = 6.0 для A_h и K_v = 0.068 для A_v; $\vartheta_{\theta *}$ - динамическая скорость трения.

Движение жидкости изучается в продольно изогнутом канале прямоугольного поперечного сечения, где: *b* - ширина поперечного сечения канала $d = \zeta + h$ - глубина жидкости с малым изменением ζ.

Если длина участка поворота достаточно велика, то в известных случаях поток стремится к некоторому стабильному состоянию, при котором зависимость от координаты θ становится статистически стационарным и граничные условия по оси θ может определяться периодическими условиями.

Граничные условия. На свободной поверхности жидкости [2, 6]

$$\left.\frac{\partial \vartheta_\theta}{\partial z}\right|_{z=\zeta+h} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \vartheta_r}{\partial z}\right|_{z=\zeta+h} = 0, \qquad \zeta\,\Big|_{z=\zeta+h} = \zeta(r,\theta). \tag{7}$$

На стенках выполняются условия прилипания: по радиальной оси $L \le r \le L+b$

$$\vartheta_\theta\big|_{r=L} = 0; \qquad \vartheta_\theta\big|_{r=L+\text{b}} = 0, \qquad \vartheta_r\big|_{r=L} = 0; \qquad \vartheta_r\big|_{r=L+\text{b}} = 0; \tag{8}$$

на дне закругленного канала $0 \le z \le h + \zeta$ также

$$\vartheta_\theta\big|_{z=0} = 0; \qquad \vartheta_r\big|_{z=0} = 0. \tag{9}$$

С удалением от стенки скорость течения резко возрастает [4]. Возрастание в большинстве случаев происходит в очень тонком ламинарном подслое толщиной δ_l, течение в котором определяется молекулярной вязкостью жидкости, дальше от вязкого подслоя поток имеет турбулентный подслой толщиной δ_t. Далее внутри области - турбулентное ядро течения.

На границе ламинарного подслоя толщиной δ_l будут выполняться

$$\vartheta_\theta\Big|_{r=L+\delta_l} = \vartheta_\theta\Big|_{r=L+b-\delta_l} = \vartheta_\theta\Big|_{z=\delta_l} = 5{,}6\,\vartheta_{\theta*} = \frac{g\delta_l}{\nu} n_{sh}^2\ \overline{\vartheta_\theta}\cdot(\overline{\vartheta_\theta}^2+\overline{\vartheta_r}^2)^{1/2}\cdot d^{5/6};$$

(10*а*)

$$\vartheta_r\Big|_{r=L+\delta_l} = \vartheta_r\Big|_{r=L+b-\delta_l} = \vartheta_r\Big|_{z=\delta_l} = 5{,}6\,\vartheta_{r*} = \frac{g\delta_l}{\nu} n_{sh}^2\ \overline{\vartheta_r}\cdot(\overline{\vartheta_\theta}^2+\overline{\vartheta_r}^2)^{1/2}\cdot d^{5/6}.$$

(10*б*)

На границе турбулентного подслоя толщиной δ_t выполняются

$$\vartheta_\theta\Big|_{r=L+\delta_l+\delta_t} = \vartheta_\theta\Big|_{r=L+b-\delta_l-\delta_t} = \vartheta_\theta\Big|_{z=\delta_l+\delta_t} = 2{,}44\,\vartheta_{\theta*}\, ln\,\frac{\vartheta_{\theta*}\delta_t}{\nu} + 5{,}5;$$

(11*а*)

$$\vartheta_r\Big|_{r=L+\delta_l+\delta_t} = \vartheta_r\Big|_{r=L+b-\delta_l-\delta_t} = \vartheta_r\Big|_{z=\delta_l+\delta_t} = 2{,}44\,\vartheta_{r*}\, ln\,\frac{\vartheta_{r*}\delta_t}{\nu} + 5{,}5.$$

(11*б*)

Из соотношений (6) можно вывести

$$\vartheta_{\theta*} = \frac{A_h}{K_h\cdot d} = n_{sh}\,(\overline{\vartheta_\theta}^2+\overline{\vartheta_r}^2)^{1/2}\cdot d^{-1/6};\quad \vartheta_{r*} = \frac{A_v}{K_v\cdot d} = n_{sh}\,(\overline{\vartheta_\theta}^2+\overline{\vartheta_r}^2)^{1/2}\cdot d^{-1/6}. \quad (12)$$

Исходя из статистической стационарности, движение изучается в одном периоде по продольной оси $r\theta$: $0 \le \theta \le \Theta$, т. е. для периода $0 \le t \le T$ предполагается одинаковые картины течений по всей $-\infty \le \theta \le \infty$, и выписывать условия периодичности

$$\vartheta_\theta(\theta, r, z, t) = \vartheta_\theta(\theta+\Theta, r, z, t);\ \vartheta_r(\theta, r, z, t) = \vartheta_r(\theta+\Theta, r, z, t); \quad (13а)$$

$$\zeta(\theta, r, t) = \zeta(\theta+\Theta, r, t). \quad (13б)$$

Для пространственно-периодического течения [2, 4] обозначили для волнового числа

$$\sigma = \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{(L+b/2)\Theta} = \frac{2\pi}{\lambda\cdot\chi},\qquad (L+b/2)\Theta = \chi\cdot\lambda. \quad (14)$$

Параметром формы поперечного сечения выберем $\beta = \frac{2h}{b}$ - отношение глубины к полуширине сечения канала. Характерной длиной выберем $\chi = h + \frac{b}{2}$. *b* и *h* через β и χ:

$$b = \frac{2}{1+\beta}\chi;\quad h = \frac{\beta}{1+\beta}\chi;\quad L \le r \le L + \frac{2}{1+\beta}\chi;\quad 0 \le z \le \frac{\beta}{1+\beta}\chi + \zeta. \quad (15)$$

Для компонентов скоростей, времени и коэффициентов трения, обозначим

$$\vartheta_\theta = U_\theta\cdot\overline{\vartheta}_\theta;\quad \vartheta_r = U_\theta\cdot\overline{\vartheta}_r;\quad t = T\cdot\overline{t};\quad \vartheta_{\theta*} = U_\theta\,\overline{\vartheta}_{\theta*},\quad A_h = \nu_T\,\overline{A}_h;\ A_v = \nu_T\,\overline{A}_v, \quad (16)$$

где U_θ - характерный масштаб скорости, $\overline{\vartheta}_\theta$, $\overline{\vartheta}_r$, $\overline{\vartheta}_{\theta*}$ - безразмерные компоненты.

$$S_t = \frac{U_\theta}{\sigma \cdot \chi} \text{ - число Струхаля, } F_r = \frac{U_\theta}{(g\cdot\chi)^{1/2}}\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ - число Фруда,} \quad (17)$$

$$\lambda = \frac{(\mathrm{L}+\mathrm{b}/2)\Theta}{\chi} = F_r \cdot \mathrm{S_t}^{-1} = \frac{\sigma\cdot\chi^{1/2}}{g^{1/2}}\left(\frac{1+\beta}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \bar{\delta}_t = \frac{\delta_t}{\chi}\,\frac{1+\beta}{\beta}; \quad \bar{\delta}_l = \frac{\delta_l}{\chi}\,\frac{1+\beta}{\beta}, \qquad (18)$$

$$\bar{b} = \frac{b}{\chi} = \frac{2}{1+\beta} + \bar{\delta}_l + \bar{\delta}_t; \quad \bar{d}_{cp} = \frac{h}{\chi} = \frac{\beta}{1+\beta} + \bar{\delta}_l + \bar{\delta}_t; \quad \bar{d} = \frac{\beta}{1+\beta} + \bar{\zeta} + \bar{\delta}_l + \bar{\delta}_t. \qquad (19)$$

Рассматриваемая область изменения пространственных координат в безразмерных величинах (без учета пограничных слоев) записываются как:

$$0 \le \overline{(\mathrm{L}+r)\theta} \le \lambda; \quad 0 \le \bar{r} \le \frac{2}{1+\beta}; \quad 0 \le \bar{z} \le \bar{\zeta} + \frac{\beta}{1+\beta}. \qquad (20)$$

Масштаб скоростей определяются из соотношения числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\chi \cdot U_\theta}{\nu_T}, \qquad U_\theta = \frac{\nu_T}{\chi}\mathrm{Re}. \qquad (21)$$

С учетом обозначений (14)-(21), переписывая систему уравнений [4], удовлетворяющие граничным условиям (7)-(13), и считая число Струхаля S_t =1, систему можно привести к безразмерным записям. В обозначениях величин можно переписать с «черточками», а затем, при переходе к размерным значениям учесть, что записные виды граничных условий не меняются. Наконец, переходя к безразмерным величинам, и «отбрасывая черточки» уже в безразмерных переменных, перепишем систему уравнений:

$$\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial t} + \vartheta_r\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial r} + \vartheta_\theta\frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\vartheta_r\vartheta_\theta}{r} - \left(\frac{\partial}{\partial r}\int_0^z \vartheta_r dz + \frac{1}{r}\int_0^z \vartheta_r dz + \frac{\partial}{r\partial\theta}\int_0^z \vartheta_\theta dz\right)\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial z} = \frac{1}{F_r}\left(I_\theta - \frac{\partial\zeta}{r\partial\theta}\right) +$$
$$+ \frac{1}{R_e}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(A_h\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_h\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_v\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}A_h\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial r} + A_h\left(2\frac{\partial\vartheta_r}{r\partial\theta} - \vartheta_\theta\right)\frac{1}{r^2}\right];$$

(22)

$$\frac{\partial\vartheta_r}{\partial t} + \vartheta_r\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r} + \vartheta_\theta\frac{\partial\vartheta_r}{r\partial\theta} - \frac{\vartheta_\theta^2}{r} - \left(\frac{\partial}{\partial r}\int_0^z \vartheta_r dz + \frac{1}{r}\int_0^z \vartheta_r dz + \frac{\partial}{r\partial\theta}\int_0^z \vartheta_\theta dz\right)\frac{\partial\vartheta_r}{\partial z} = -\frac{1}{F_r}\left(I_r + \frac{\partial\zeta}{\partial r}\right) +$$
$$+ \frac{1}{R_e}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(A_h\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_h\frac{\partial\vartheta_r}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_v\frac{\partial\vartheta_r}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}A_h\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r} - A_h\left(2\frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta} - \vartheta_r\right)\frac{1}{r^2}\right];$$

(23)

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{1}{r}\int_0^{\zeta+h}\vartheta_r dz + \vartheta_r\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \vartheta_\theta\frac{\partial\zeta}{r\partial\theta} = -(h+\zeta)\left(\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r} + \frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta}\right), \qquad (24)$$

где I_θ - продольный средний уклон по осевой координате θ.

Для решения системы уравнений (22)-(24) с граничными условиями (7)-(13), будем ввести следующие обозначения аналогично обозначениям работы [3, 6]:

$$\vartheta_\theta(\theta, r, z, t) = \vartheta_{\theta_p}(\theta, r, t)\cdot w_p(z) = \vartheta_{\theta_p}(\theta, r, t)\cdot\sum_{p=1}^{\mathrm{P}}\cos(B_p Z'), \qquad (25)$$

$$\vartheta_r(\theta, r, z, t) = \vartheta_r(\theta, r, z, t)\cdot w_p(z) = \vartheta_{r_p}(\theta, r, z, t)\cdot\sum_{p=1}^{\mathrm{P}}\cos(B_p Z'), \qquad (26)$$

где $B_p = \frac{p-1}{d}\pi$, (p = 1, 2, …, P), $d = \zeta + h$, $Z' = Z + \zeta$. (27)

Компоненты вертикально осредненных скоростей $\overline{\vartheta_\theta}$, $\overline{\vartheta_r}$ по θ, r:

$$\overline{\vartheta_\theta} = \vartheta_{\theta_p}\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{\mathrm{P}}\cos(B_p Z'_k), \qquad \overline{\vartheta_r} = \vartheta_{r_p}\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{\mathrm{P}}\cos(B_p Z'_k). \qquad (28)$$

В формулах безразмерных величин отбрасыванием «черточек» соблюдается первоначальный вид для коэффициентов турбулентных вязкостей A_h и A_v.

$$A_h = k_h\cdot n_{\mathrm{sh}}\sqrt{\vartheta^2_{\theta_p} + \vartheta^2_{r_p}}\cdot d^{5/6}\,\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{\mathrm{P}}\cos(B_p Z'_k), \qquad A_v = {k_v}/{k_h}\,A_h. \qquad (29)$$

Обозначая

$$B_{sc} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{\mathrm{P}} B_p\sin(B_p Z'_k)\Big/\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{\mathrm{P}}\cos(B_p Z'_k), \qquad \mathrm{W}_{\mathrm{isc}_k} = \sum_{p=1}^{\mathrm{P}}\frac{1}{B_p}\sin(B_p Z'_k)\Big/\sum_{p=1}^{\mathrm{P}}\cos(B_p Z'_k); \qquad (30)$$

$$\mathrm{W}_{\mathrm{psc}_k} = \sum_{p=1}^{\mathrm{P}} B_p\sin(B_p Z'_k)\Big/\sum_{p=1}^{\mathrm{P}}\cos(B_p Z'_k); \qquad \mathrm{W}_{\mathrm{ppc}_k} = \sum_{p=1}^{\mathrm{P}} B_p^2\cos(B_p Z'_k)\Big/\sum_{p=1}^{\mathrm{P}}\cos(B_p Z'_k), \qquad (31)$$

приведенные выше уравнения (22)-(24) можно записать в следующей форме

$$\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial t} + \vartheta_r\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial r} + \vartheta_\theta\frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\vartheta_r\vartheta_\theta}{r} + \left(\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\vartheta_r + \frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta}\right)\vartheta_\theta\,\mathrm{W}_{\mathrm{isc}_k}\,\mathrm{W}_{\mathrm{psc}_k} = \frac{1}{F_r}\left(I_\theta - \frac{\partial\zeta}{r\partial\theta}\right) +$$

$$+\frac{1}{R_e}A_h\left[\frac{\partial^2\vartheta_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{A_v}{A_h}\vartheta_\theta(\mathrm{W}_{\mathrm{ppc}_k} - B_{sc}\,\mathrm{W}_{\mathrm{psc}_k}) + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta_\theta}{\partial r} + \left(2\frac{\partial\vartheta_r}{r\partial\theta} - \vartheta_\theta\right)\frac{1}{r^2}\right]; \qquad (32)$$

$$\frac{\partial\vartheta_r}{\partial t} + \vartheta_r\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r} + \vartheta_\theta\frac{\partial\vartheta_r}{r\partial\theta} - \frac{\vartheta_\theta^2}{r} - \left(\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\vartheta_r + \frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta}\right)\vartheta_r\,\mathrm{W}_{\mathrm{isc}_k}\,\mathrm{W}_{\mathrm{psc}_k} = -\frac{1}{F_r}\left(I_r + \frac{\partial\zeta}{\partial r}\right) +$$

$$+\frac{1}{R_e}\left[\frac{\partial^2\vartheta_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta_r}{\partial\theta^2} + \frac{A_v}{A_h}\vartheta_r(\mathrm{W}_{\mathrm{ppc}_k} - B_{sc}\,\mathrm{W}_{\mathrm{psc}_k}) - A_h\left(2\frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta} - \vartheta_r\right)\frac{1}{r^2}\right]; \qquad (33)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \vartheta_r\frac{\partial\zeta}{\partial r} + \vartheta_\theta\frac{\partial\zeta}{r\partial\theta} = -(h+\zeta)\left(\frac{\partial\vartheta_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\vartheta_r + \frac{\partial\vartheta_\theta}{r\partial\theta}\right). \qquad (24)$$

Для решения систем уравнений (32), (33), (24) с выше упомянутыми граничными условиями будем использовать одну из схем метода дробных шагов [5].

Заменяя трехмерную непрерывную пространственную область на сеточную. Пространственные шаги по направлениям θ, r, z будем обозначать через:

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{rM}; \qquad \Delta r = \frac{2}{(1+\beta)\cdot(JN-5)}; \qquad \Delta z = \frac{\beta}{(1+\beta)\cdot(K-3)}; \tag{34}$$

$$\Delta d_{i,j} = \Delta z + \frac{\zeta_{i,j}}{K-3}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, M+1, \quad j = 1, 2, \ldots, JN. \tag{35}$$

Тогда значения координат в узловых точках:

$$\theta_i = \Delta\theta \cdot i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, M+1, \tag{36}$$

$$r_1 = L; \qquad r_2 = r_1 + \delta_l; \qquad r_3 = r_2 + \delta_t; \tag{37'}$$

$$r_j = r_{j-1} + \Delta r, \quad j = 4,\ldots, JN-2; \quad r_{JN-1} = r_{JN-2} + \delta_t; \; r_{JN} = r_{JN-1} + \delta_l, \tag{37''}$$

$$z'_{i,j,1} = 0; \quad z'_{i,j,2} = \delta_l; \quad z'_{i,j,3} = \delta_l + \delta_t, \qquad i = 0, 1,\ldots, M+1, \; j = 1,\ldots, JN, \tag{38}$$

$$z'_{i,j,k} = z'_{i,j,k-1} + \Delta d_{i,j}, \qquad i = 0, 1,\ldots, M+1, \qquad j = 1,\ldots, JN, \; k = 4, \ldots, K. \tag{39}$$

Приведем общую схему предиктор-корректор метода дробных шагов для одного шага по времени [n, n+1] для уравнений (32), (33), (24) с граничными условиями (7) - (13*б*). Начальные значения можно получить либо из расчетов решения ламинарного течения, либо из нулевых начальных значений как:

$$\vartheta_\theta^{\,0} = 0; \qquad \vartheta_r^{\,0} = 0; \qquad \zeta^0 = 0. \tag{40}$$

Опираясь на начальные условия, сначала по явной схеме предиктора предсказываются (вычисляются) значения ϑ_θ, ϑ_r, ζ:

$$\frac{\vartheta_\theta^{\,n,1} - \vartheta_\theta^{\,n}}{\tau} = \frac{1}{R_e} A_h \left[\Lambda_{\theta\theta}\vartheta_\theta^{\,n} + \Lambda_{rr}\vartheta_\theta^{\,n} - \frac{A_v}{A_h}\vartheta_\theta^{\,n}\left(\mathrm{W}_{\mathrm{ppc}_k} - B_{sc}\mathrm{W}_{\mathrm{psc}_k}\right)\right] - \left(\vartheta_\theta^{\,n}\,\Delta_\theta\vartheta_\theta^{\,n} + \right.$$
$$\left. + \vartheta_r^{\,n}\,\Delta_r\vartheta_\theta^{\,n}\right) + \vartheta_\theta^{\,n}\left(\Delta_\theta\vartheta_\theta^{\,n} + \Delta_r\vartheta_r^{\,n}\right)\mathrm{W}_{\mathrm{isc}_k}\;\mathrm{W}_{\mathrm{psc}_k} + \frac{1}{F_r}\left(I_\theta - \Delta_\theta\zeta^n\right); \tag{41'}$$

$$\frac{\vartheta_r^{\,n,1} - \vartheta_r^{\,n}}{\tau} = \frac{1}{R_e} A_h \left[\Lambda_{\theta\theta}\vartheta_r^{\,n} + \Lambda_{rr}\vartheta_r^{\,n} - \frac{A_v}{A_h}\vartheta_r^{\,n}\left(\mathrm{W}_{\mathrm{ppc}_k} - B_{sc}\mathrm{W}_{\mathrm{psc}_k}\right)\right] - \left(\vartheta_\theta^{\,n}\,\Delta_\theta\vartheta_r^{\,n} + \right.$$
$$\left. + \vartheta_r^{\,n}\,\Delta_r\vartheta_r^{\,n}\right) + \vartheta_r^{\,n}\left(\Delta_\theta\vartheta_\theta^{\,n} + \Delta_r\vartheta_r^{\,n}\right)\mathrm{W}_{\mathrm{isc}_k}\;\mathrm{W}_{\mathrm{psc}_k} + \frac{1}{F_r}\left(I_r - \Delta_r\zeta^n\right); \tag{41''}$$

$$\frac{\zeta^{n,1} - \zeta^n}{\tau} = -\left(\vartheta_\theta^{\,n}\,\Delta_\theta\zeta^n + \vartheta_r^{\,n}\,\Delta_r\zeta^n\right) - (h + \zeta^n)(\Delta_\theta\zeta^n + \Delta_r\zeta^n). \tag{41'''}$$

Записи этих уравнений в разностных схемах без нижних индексов по пространственным координатам излагаются работе [5]. Разностные уравнения ($41'$)-($41'''$) выполняются внутри трехмерной пространственной области для значений i = 1, 2, …, M; j =4, …, JN-3; k = 4,…, K-1. Граничные условия выражаются через одни и те же соответствующие формулы временных слоев и для полного временного шага, и для дробных шагов по времени, и для предиктора, и для корректора. Поэтому в обозначениях пока их можно выписывать без указания верхних индексов временных дробных слоев.

$$\vartheta_{\theta i,j,K} = \vartheta_{\theta i,j,K-1}; \quad \vartheta_{r i,j,K} = \vartheta_{r i,j,K-1}, \quad i = 0, 1, \dots, M+1; \; j = 1, \dots, JN. \tag{42}$$

Для компонентов динамических скоростей (12) в узловых точках:

$$\vartheta_{\theta * i,JN-1,k} = n\sqrt{\overline{\vartheta^{\,2}_{\theta i,JN-1}} + \overline{\vartheta^{\,2}_{r i,JN-1}}} \cdot d^{-1/6}_{i,JN-1,k}, \quad \vartheta_{r * i,JN-1,k} = n\sqrt{\overline{\vartheta^{\,2}_{\theta i,JN-1}} + \overline{\vartheta^{\,2}_{r i,JN-1}}} \cdot d^{-1/6}_{i,JN-1,k}. \tag{42*}$$

Представление по двум крайним точкам на оси основного потока $r\theta$ граничных условий периодичности (13*а*) для j =1, …, JN; k = 1,…, K:

$$\vartheta_{\theta 0,j,k} = \vartheta_{\theta M,j,k}; \quad \vartheta_{\theta 1,j,k} = \vartheta_{\theta M+1,j,k}; \quad \vartheta_{r 0,j,k} = \vartheta_{r M,j,k}; \quad \vartheta_{r 1,j,k} = \vartheta_{r M+1,j,k}, \tag{42'}$$

позволяет перейти к «почти трех-диагональной» матрице [1] и из (13*б*)

$$\zeta_{0,j} = \zeta_{M,j}, \; \zeta_{1,j} = \zeta_{M+1,j}, \qquad j = 1, \dots, JN. \tag{42''}$$

Из граничных условий: прилипания (8) и (9); на границах ламинарного подслоя (10*а*) и (10*б*); на границах турбулентного подслоя (11*а*) и (11*б*) имеем:

по направлениям $r\theta$ для i = 0, 1, …, M+1; k = 2,…, K

$$\vartheta_{\theta i,1,k} = 0; \quad \vartheta_{\theta i,JN,k} = 0; \quad \vartheta_{\theta i,2,k} = 5{,}6\,\vartheta_{\theta * i,2,k}; \quad \vartheta_{\theta i,JN-1,k} = 5{,}6\,\vartheta_{\theta * i,JN-1,k}; \tag{43'}$$

$$\vartheta_{\theta i,3,k} = 2{,}44\,\vartheta_{\theta * i,3,k} \ln \frac{\vartheta_{\theta * i,3,k}\delta_t}{\nu_t} + 5{,}5; \quad \vartheta_{\theta i,JN-2,k} = 2{,}44\,\vartheta_{\theta * i,JN-2,k} \ln \frac{\vartheta_{\theta * i,JN-2,k}\delta_t}{\nu_t} + 5{,}5, \tag{43''}$$

по направлениям r для i = 0, 1, …, M+1; k = 2,…, K

$$\vartheta_{r i,1,k} = 0; \quad \vartheta_{r i,JN,k} = 0; \quad \vartheta_{r i,2,k} = 5{,}6\,\vartheta_{r * i,2,k}; \quad \vartheta_{r i,JN-1,k} = 5{,}6\,\vartheta_{r * i,JN-1,k}; \tag{44'}$$

$$\vartheta_{r i,3,k} = 2{,}44\,\vartheta_{r * i,3,k} \ln \frac{\vartheta_{r * i,3,k}\delta_t}{\nu_t} + 5{,}5; \quad \vartheta_{r i,JN-2,k} = 2{,}44\,\vartheta_{r * i,JN-2,k} \ln \frac{\vartheta_{r * i,JN-2,k}\delta_t}{\nu_t} + 5{,}5, \tag{44''}$$

по направлению z для i = 0, 1,…, M+1; j = 2, …, JN-1

$$\vartheta_{\theta i,j,1} = 0, \quad \vartheta_{\theta i,j,2} = 5{,}6\,\vartheta_{\theta * i,j,2}, \quad \vartheta_{\theta i,j,3} = 2{,}44\,\vartheta_{\theta * i,j,3} \ln \frac{\vartheta_{\theta * i,j,3}\delta_t}{\nu_t} + 5{,}5; \tag{45'}$$

$$\vartheta_{r i,j,1} = 0, \quad \vartheta_{r i,j,2} = 5{,}6\,\vartheta_{r * i,j,2}, \quad \vartheta_{r i,j,3} = 2{,}44\,\vartheta_{r * i,j,3} \ln \frac{\vartheta_{r * i,j,3}\delta_t}{\nu_t} + 5{,}5. \tag{45''}$$

На свободной поверхности последовательно дополняются значения

$$\zeta_{i,3} = \zeta_{i,4}, \qquad \zeta_{i,2} = \zeta_{i,3}, \qquad \zeta_{i,1} = \zeta_{i,2};$$

$\zeta_{i,JN-2} = \zeta_{i,JN-3}$, $\zeta_{i,JN-1} = \zeta_{i,JN-2}$, $\zeta_{i,JN} = \zeta_{i,JN-1}$, i = 0, 1, …, M+1. (46)

Парные условия ($42'$) с ($42''$) переопределяют искомых величин в пространственном слое i = 0 и i = M+1, но они играют важную роль для получения соотношений преобразуемого с понижением порядка матриц, где станет i = 1, … , M.

Получая из решения системы уравнений ($41'$)-($41'''$) с условиями (42)-(46), в слое предиктора значения $\vartheta_\theta^{\,n,1}$, $\vartheta_r^{\,n,1}$, $\zeta^{\,n,1}$, можно выписать схемы корректора для $\vartheta_\theta^{\,n,2}$, $\vartheta_r^{\,n,2}$, $\zeta^{\,n,2}$, а потом подстановкой $\vartheta_\theta^{\,n,2}$, $\vartheta_r^{\,n,2}$, $\zeta^{\,n,2}$ на место $\vartheta_\theta^{\,n,1}$, $\vartheta_r^{\,n,1}$, $\zeta^{\,n,1}$, чтобы получить $\vartheta_\theta^{\,n,3}$, $\vartheta_r^{\,n,3}$, $\zeta^{\,n,3}$, и так далее $\vartheta_\theta^{\,n,p}$, $\vartheta_r^{\,n,p}$, $\zeta^{n,p}$, где $1 \le p \le P$.

В общем виде схема корректора для уравнения (32) имеет вид [5]:

$$\frac{\tilde{\vartheta}_\theta - \vartheta_\theta^{\,n}}{0{,}5\tau} = F_{\vartheta_\theta}^{n,p} + \frac{1}{R_e} A_h \left(\Lambda_{\theta\theta} \tilde{\vartheta}_\theta + \Lambda_{rr} \vartheta_\theta^{\,n} \right), \qquad (47')$$

$$\frac{\vartheta_\theta^{\,n,p+1} - \tilde{\vartheta}_\theta}{0{,}5\tau} = F_{\vartheta_\theta}^{n,p} + \frac{1}{R_e} A_h \left(\Lambda_{\theta\theta} \tilde{\vartheta}_\theta + \Lambda_{rr} \vartheta_\theta^{\,n,p+1} \right), \qquad (47'')$$

для i = 1,…, M; j =4,…, JN-3, k = 4,…, K-1 с граничными условиями (42), (42^*), ($42'$), ($43'$)-($43''$), ($45'$), выписанные для соответствующих дробных шагов, где

$$F_{\vartheta_\theta}^{n,p} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{A_v}{R_e} [(\vartheta_\theta^{\,n,p} + \vartheta_\theta^{\,n}) \, (\mathrm{W}_{\mathrm{ppc}_k} - B_{sc} \mathrm{W}_{\mathrm{psc}_k})] - A_h [(\vartheta_\theta^{\,n,p} \, \Delta_\theta \vartheta_\theta^{\,n,p} + \vartheta_\theta^{\,n} \, \Delta_\theta \vartheta_\theta^{\,n} + \right.$$

$$+ \vartheta_r^{\,n,p} \, \Delta_r \vartheta_\theta^{\,n,p} + \vartheta_r^{\,n} \, \Delta_r \vartheta_\theta^{\,n}) + (\vartheta_\theta^{\,n,p} \, (\Delta_\theta \vartheta_\theta^{\,n,p} + \Delta_r \vartheta_r^{\,n,p}) + + \vartheta_\theta^{\,n} (\Delta_\theta \vartheta_\theta^{\,n} + \Delta_r \vartheta_r^{\,n}$$

$$\left.)) \cdot \mathrm{W}_{\mathrm{isc}_k} \, \mathrm{W}_{\mathrm{psc}_k}] + \left(I_\theta - \Delta_\theta \zeta^{n,p} - \Delta_\theta \zeta^{n} \right) \frac{A_h}{F_r} \right\}. \qquad (47''')$$

Аналогично схема корректора для уравнения (33) имеет вид:

$$\frac{\tilde{\vartheta}_r - \vartheta_r^{\,n}}{0{,}5\tau} = F_{\vartheta_r}^{n,p} + \frac{1}{R_e} A_h \left(\Lambda_{\theta\theta} \tilde{\vartheta}_r + \Lambda_{rr} \vartheta_r^{\,n} \right), \qquad (48')$$

$$\frac{\vartheta_r^{\,n,p+1} - \tilde{\vartheta}_r}{0{,}5\tau} = F_{\vartheta_r}^{n,p} + \frac{1}{R_e} A_h \left(\Lambda_{\theta\theta} \tilde{\vartheta}_r + \Lambda_{rr} \vartheta_r^{\,n,p+1} \right), \qquad (48'')$$

для i = 1,…, M; j =4,…, JN-3, k = 4,…, K-1 с граничными условиями (42), (42^*), ($42'$), ($44'$)-($44''$), ($45''$), для соответствующих дробных шагов, где $F_{\vartheta_r}^{n,p}$ - аналогична записи ($47''$).

Наконец, для уравнения (24) целесообразно послойные пересчеты

$$\frac{\zeta^{n,p+1} - \zeta^{n}}{0{,}5\tau} = -\, [\vartheta_\theta^{\,n,p} \, \Delta_\theta \zeta^{n,p} + \vartheta_r^{\,n,p} \, \Delta_r \zeta^{n,p} - (h + \zeta^{n,p})(\Delta_\theta \zeta^{n,p} + \Delta_r \zeta^{n,p}) + \vartheta_\theta^{\,n} \, \Delta_\theta \zeta^{n} +$$

$$+\vartheta_r^{\,n}\,\Delta_r\zeta^n - (h+\zeta^n)(\Delta_\theta\zeta^n+\Delta_r\zeta^n)] \qquad (49)$$

для значений индексов i = 1, …, M; j =4, …, JN-3 с граничными условиями (46), выписанные для соответствующих временных дробных шагов. Решая попеременно системы уравнений ($47'$)-($47''$), ($48'$)-($48''$), (49) с выше указанными граничными условиями, выполняющегося для каждого дробного шага по времени, можно установить корректор для таких значений P ($1\le p\le P$) с устанавливающим значением, можно положить [5]

$$\vartheta_\theta^{\,n+1}=\vartheta_\theta^{\,n,P}, \qquad \vartheta_r^{\,n+1}=\vartheta_r^{\,n,P}, \qquad \zeta^{n+1}=\zeta^{n,P}, \qquad (50)$$

чем и заканчивается вычисление для одного полного шага по времени [n, n+1].

Для составления алгоритма решения задачи будем излагать формулы предиктора и корректора по временным слоям вычисления, чтобы использовать продольно-поперечной прогонки в схеме корректора метода дробных шагов, где по продольному направлению используется алгоритм Бунемана, а в поперечном направлении – формулы прогонки.

Развернутая запись уравнения ($41'$) для схемы предиктора:

$$\vartheta_{\theta i,j,k}^{\,n,1}=\vartheta_{\theta i,j,k}^{\,n}+\frac{A_h}{R_e}\left[\frac{\tau}{(r\Delta\theta)^2}(\vartheta_{\theta i+1,j,k}^{\,n}-2\vartheta_{\theta i,j,k}^{\,n}+\vartheta_{\theta i-1,j,k}^{\,n})+\frac{\tau}{\Delta r^2}(\vartheta_{\theta i,j+1,k}^{\,n}-2\vartheta_{\theta i,j,k}^{\,n}+\right.$$

$$\left.+\vartheta_{\theta i,j-1,k}^{\,n})-\frac{A_v}{A_h}\vartheta_{\theta i,j,k}^{\,n}(\mathrm{W}_{\mathrm{ppc}_k}-B_{sc}\mathrm{W}_{\mathrm{psc}_k})\right]-[\vartheta_{\theta i,j,k}^{\,n}\frac{\tau}{r\Delta\theta}(\vartheta_{\theta i+1,j,k}^{\,n}-\vartheta_{\theta i-1,j,k}^{\,n})++\vartheta_{r\,i,j,k}^{\,n}$$

$$\frac{\tau}{\Delta r}(\vartheta_{\theta i+1,j,k}^{\,n}-\vartheta_{\theta i-1,j,k}^{\,n})]+\vartheta_{\theta i,j,k}^{\,n}\;[\frac{\tau}{r\Delta\theta}(\vartheta_{\theta i+1,j,k}^{\,n}-\vartheta_{\theta i-1,j,k}^{\,n})+\frac{\tau}{\Delta r}(\vartheta_{r\,i,j+1,k}^{\,n}-$$

$$-\vartheta_{r\,i,j-1,k}^{\,n})]\,\mathrm{W}_{\mathrm{isc}_k}\;\mathrm{W}_{\mathrm{psc}_k}+\frac{1}{F_r}\left(I_\theta-\frac{\tau}{r\Delta\theta}\zeta_{i,j}^{n}\right), \qquad (51')$$

для i = 1,…, M; j =4,…, JN-3, k = 4,…, K-1, с учетом (42^*), значения из ($42'$)-(46)

$$\vartheta_{\theta_{*i,JN-1,k}}^{\,n,1}=n\sqrt{\overline{\vartheta_{\theta_{i,JN-1}}^{\,n,1}}^{\,2}+\overline{v_{i,JN-1}^{n,1}}^{\,2}}\cdot d_{i,JN-1,k}^{-1/6}, \qquad (52^*)$$

$$\vartheta_{\theta_{0,j,k}}^{\,n,1}=\vartheta_{\theta_{M,j,k}}^{\,n,1}, \qquad \vartheta_{\theta_{M+1,j,k}}^{\,n,1}=\vartheta_{\theta_{1,j,k}}^{\,n,1}, \quad j=1,\dots,JN-1;\quad k=2,\dots,K, \qquad (53')$$

$$\vartheta_{\theta i,1,k}^{\,n,1}=0;\quad \vartheta_{\theta i,2,k}^{\,n,1}=5{,}6\,\vartheta_{\theta_{*i,2,k}}^{\,n,1},\quad \vartheta_{\theta i,3,k}^{\,n,1}=2{,}44\,\vartheta_{\theta_{*i,3,k}}^{\,n,1}\;ln\;\frac{\vartheta_{\theta_{*i,3,k}}^{\,n,1}\,\delta_t}{\nu_t}+5{,}5; \qquad (53'')$$

$$\vartheta_{\theta i,JN,k}^{\,n,1}=0,\quad \vartheta_{\theta i,JN-1,k}^{\,n,1}=5{,}6\,\vartheta_{\theta_{*i,JN-1,k}}^{\,n,1}, \qquad i=1,\dots,M;\ k=2,\dots,K, \qquad (\overline{53''})$$

$$\vartheta^{n,1}_{\theta i,JN-2,k} = 2{,}44\,\vartheta^{n,1}_{\theta_{*i,JN-2,k}}\ ln\ \frac{\vartheta^{n,1}_{\theta_{*i,JN-2,k}}\delta_t}{\nu_t} + 5{,}5; \qquad i = 1,\ldots, M; \quad k = 3,\ldots, K, \qquad (53''')$$

и другие формулы, написанные с временными верхними индексами предиктора. Схемы предиктора уравнения ($41''$) для $\vartheta^{n,1}_{r\,i,j,k}$ пишутся с аналогично. Развернутая запись ($41'''$):

$$\zeta^{n,1}_{i,j} = \zeta^{n}_{i,j} - [\vartheta^{n}_{\theta i,j,k}\frac{\tau}{r\Delta\theta}(\zeta^{n}_{i+1,j} - \zeta^{n}_{i-1,j}) + \vartheta_r{}^{n}{}_{i,j,k}\frac{\tau}{\Delta r}(\zeta^{n}_{i,j+1} - \zeta^{n}_{i,j-1})] -$$

$$- (h + \zeta^{n}_{i,j})[\frac{\tau}{r\Delta\theta}(\zeta^{n}_{i+1,j} - \zeta^{n}_{i-1,j}) + \frac{\tau}{\Delta r}(\zeta^{n}_{i+1,j} - \zeta^{n}_{i-1,j})] \qquad (54)$$

для i = 1,…, M; j =4,…, JN-3, со значениями (46) для i = 0, M+1 и j =3, 2, 1, JN-2, JN-1, JN:

$$\zeta^{n,1}_{0,j} = \zeta^{n,1}_{M,j}, \qquad \zeta^{n,1}_{M+1,j} = \zeta^{n,1}_{1,j}, \qquad \zeta^{n,1}_{i,3} = \zeta^{n,1}_{i,4}, \qquad \zeta^{n,1}_{i,2} = \zeta^{n,1}_{i,3},$$

$$\zeta^{n,1}_{i,1} = \zeta^{n,1}_{i,2}; \quad \zeta^{n,1}_{i,JN-2} = \zeta^{n,1}_{i,JN-3}, \quad \zeta^{n,1}_{i,JN-1} = \zeta^{n,1}_{i,JN-2}, \quad \zeta^{n,1}_{i,JN} = \zeta^{n,1}_{i,JN-1}. \qquad (55)$$

Для схем корректора развернутая запись ($47'$), ($47''$) имеет вид

$$\frac{\tilde\vartheta_{\theta i,j,k} - \vartheta^{n}_{\theta i,j,k}}{0{,}5\tau} = F^{n,p}_{\vartheta_{\theta i,j,k}} + \frac{A_h}{R_e}\left(\frac{\tilde\vartheta_{\theta i+1,j,k} - 2\tilde\vartheta_{\theta i,j,k} + \tilde\vartheta_{\theta i-1,j,k}}{(r\Delta\theta)^2} + \frac{\vartheta^{n}_{\theta i,j+1,k} - 2\vartheta^{n}_{\theta i,j,k} + \vartheta^{n}_{\theta i,j-1,k}}{\Delta r^2}\right), \quad (56')$$

$$\frac{\vartheta^{n,p+1}_{\theta i,j,k} - \tilde\vartheta_{\theta i,j,k}}{0{,}5\tau} = F^{n,p}_{\vartheta_{\theta i,j,k}} + \frac{A_h}{R_e}\left(\frac{\tilde\vartheta_{\theta i+1,j,k} - 2\tilde\vartheta_{\theta i,j,k} + \tilde\vartheta_{\theta i-1,j,k}}{(r\Delta\theta)^2} + \frac{\vartheta^{n,p+1}_{\theta i,j+1,k} - 2\vartheta^{n,p+1}_{\theta i,j,k} + \vartheta^{n,p+1}_{\theta i,j-1,k}}{\Delta r^2}\right), \quad (56'')$$

для i = 1,…, M; j =4,…, JN-3, k = 4,…, K-1 с граничными условиями (42), (42^*), ($42'$), ($43'$)-($43''$), ($45'$), выписанные для соответствующих временных дробных шагов.

При попеременном решении ($56'$) и i = 1,…, M для $\tilde\vartheta_{\theta i,j,k}$:

$$\tilde\vartheta_{\theta_{*i,JN-1,k}} = n\sqrt{\overline{\tilde\vartheta_{\theta_{i,JN-1}}}^{\,2} + \overline{\tilde\vartheta_{r\,i,JN-1}}^{\,2}} \cdot d^{-1/6}_{i,JN-1,k}, \qquad k = 2,\ldots, K-1, \qquad (57^*)$$

$$\tilde\vartheta_{\theta_{0,j,k}} = \tilde\vartheta_{\theta_{M,j,k}}, \qquad \tilde\vartheta_{\theta_{M+1,j,k}} = \tilde\vartheta_{\theta_{1,j,k}}, \qquad j = 2, \ldots, JN-1; \quad k = 2,\ldots, K-1, \qquad (57')$$

$$\tilde\vartheta_{\theta i,1,k} = 0; \quad \tilde\vartheta_{\theta i,2,k} = 5{,}6\,\tilde\vartheta_{\theta_{*i,2,k}}; \quad \tilde\vartheta_{\theta i,3,k} = 2{,}44\,\tilde\vartheta_{\theta_{*i,3,k}}\ ln\frac{\tilde\vartheta_{\theta_{*i,3,k}}\delta_t}{\nu_t} + 5{,}5; \quad k = 2,\ldots, K-1, \qquad (57'')$$

$$\tilde\vartheta_{\theta i,JN=2,k} = 2{,}44\,\tilde\vartheta_{\theta_{*i,JN-2,k}}\ ln\frac{\tilde\vartheta_{\theta_{*i,JN-2,k}}\delta_t}{\nu_t} + 5{,}5; \quad \tilde\vartheta_{\theta i,JN=1,k} = 5{,}6\,\tilde\vartheta_{\theta_{*i,JN-1,k}}; \quad \tilde\vartheta_{\theta i,JN,k} = 0, \qquad (57''')$$

$\tilde{\vartheta}_{\theta i,j,1}$=0; $\tilde{\vartheta}_{\theta i,j,2}$= 5,6 $\tilde{\vartheta}_{\theta_{*i,j,2}}$; $\tilde{\vartheta}_{\theta i,j,3}$= 2,44 $\tilde{\vartheta}_{\theta_{*i,j,3}}$ $ln\frac{\tilde{\vartheta}_{\theta_{*i,j,3}}\delta_t}{\nu_t}$+5,5, j =2, …, JN-1, (57^{IV})

$$\tilde{\vartheta}_{\theta_{i,j,K}} = \tilde{\vartheta}_{\theta_{i,j,K-1}} + 0{,}052\frac{U_{sh}}{U}\Delta d_{i,j}, \quad j = 2,\dots, JN-1, \qquad (57^{V})$$

а затем при i = 1, …, M для временного слоя $\vartheta_{\theta_{i,j,K}}^{n,p+1}$:

$$\vartheta_{\theta_{*i,JN-1,k}}^{n,p+1} = n\sqrt{\overline{\vartheta_{\theta_{i,JN-1}}^{n,p+1\,2}} + \overline{v_{i,JN-1}^{n,p+1\,2}}}\cdot d_{i,JN-1,k}^{-1/6}, \qquad k = 2,\dots, K-1, \qquad (58^{*})$$

$$\vartheta_{\theta_{0,j,k}}^{n,p+1} = \vartheta_{\theta_{M,j,k}}^{n,p+1}, \quad \vartheta_{\theta_{M+1,j,k}}^{n,p+1} = \vartheta_{\theta_{1,j,k}}^{n,p+1}, \qquad j = 2, \dots, JN-1; \quad k = 2,\dots, K-1, \qquad (58')$$

$$\vartheta_{\theta i,1,k}^{n,p+1} = 0; \quad \vartheta_{\theta i,2,k}^{n,p+1} = 5{,}6\,\vartheta_{\theta_{*i,2,k}}^{n,p+1}; \quad \vartheta_{\theta i,3,k}^{n,p+1} = 2{,}44\,\vartheta_{\theta_{*i,3,k}}^{n,p+1}\, ln\,\frac{\vartheta_{\theta_{*i,3,k}}^{n,p+1}\delta_t}{\nu_t} + 5{,}5, \qquad (58'')$$

$$\vartheta_{\theta i,JN,k}^{n,p+1} = 0, \quad \vartheta_{\theta i,JN-1,k}^{n,p+1} = 5{,}6\,\vartheta_{\theta_{*i,JN-1,k}}^{n,p+1}, \quad \vartheta_{\theta i,JN-2,k}^{n,p+1} = 2{,}44\,\vartheta_{\theta_{*i,JN-2,k}}^{n,p+1}\, ln\,\frac{\vartheta_{\theta_{*i,JN-2,k}}^{n,p+1}\delta_t}{\nu_t} + 5{,}5, \qquad (58''')$$

$$\vartheta_{\theta i,j,2}^{n,p+1} = 5{,}6\,\vartheta_{\theta_{*i,j,2}}^{n,p+1}, \quad \vartheta_{\theta i,j,3}^{n,p+1} = 2{,}44\,\vartheta_{\theta_{*i,j,3}}^{n,p+1}\, ln\,\frac{\vartheta_{\theta_{*i,j,3}}^{n,p+1}\delta_t}{\nu_t} + 5{,}5; \quad j = 2, \dots, JN-1, \qquad (58^{IV})$$

$$\vartheta_{\theta i,j,1}^{n,p+1} = 0, \qquad \vartheta_{\theta_{i,j,K}}^{n,p+1} = \vartheta_{\theta_{i,j,K-1}}^{n,p+1} + 0{,}052\frac{U_{sh}}{U}\Delta d_{i,j}, \quad j = 2,\dots, JN-1. \qquad (58^{V})$$

Подобная запись для схем корректора $(48')$ и $(48'')$ имеет вид

$$\frac{\tilde{\vartheta}_{ri,j,k} - \vartheta_{ri,j,k}^{n}}{0{,}5\tau} = F_{\vartheta_{ri,j,k}}^{n,p} + \frac{A_h}{R_e}\left(\frac{\tilde{\vartheta}_{ri+1,j,k} - 2\tilde{\vartheta}_{ri,j,k} + \tilde{\vartheta}_{ri-1,j,k}}{(r\Delta\theta)^2} + \frac{\vartheta_{ri,j+1,k}^{n} - 2\vartheta_{ri,j,k}^{n} + \vartheta_{ri,j-1,k}^{n}}{\Delta r^2}\right), \qquad (59')$$

$$\frac{\vartheta_{ri,j,k}^{n,p+1} - \tilde{\vartheta}_{ri,j,k}}{0{,}5\tau} = F_{\vartheta_{ri,j,k}}^{n,p} + \frac{A_h}{R_e}\left(\frac{\tilde{\vartheta}_{ri+1,j,k} - 2\tilde{\vartheta}_{ri,j,k} + \tilde{\vartheta}_{ri-1,j,k}}{(r\Delta\theta)^2} + \frac{\vartheta_{ri,j+1,k}^{n,p+1} - 2\vartheta_{ri,j,k}^{n,p+1} + \vartheta_{ri,j-1,k}^{n,p+1}}{\Delta r^2}\right), \qquad (59'')$$

для i = 1,…, M; j =4,…, JN-3, k = 4,…, K-1 с соответствующими граничными условиями, выписанные для соответствующих дробных шагов по времени. Сюда добавляются, с учетом (42^{*}), значения из соответствующих граничных условий при попеременном решении разностных уравнений $(59')$ и $(59'')$ сначала для временного слоя $\tilde{\vartheta}_{ri,j,k}$, а затем для временного слоя $\vartheta_{ri,j,k}^{n,p+1}$ аналогично выше приведенным.

Схема корректора замыкается послойным пересчетом (24) с записью

$$\zeta_{i,j}^{n,p+1} = \zeta_{i,j}^{n} - 0{,}5[\vartheta_{\theta i,j,K}^{n,p}\frac{\tau}{r\Delta\theta}(\zeta_{i+1,j}^{n,p} - \zeta_{i-1,j}^{n,p}) + \vartheta_{ri,j,K}^{n,p}\frac{\tau}{\Delta r}(\zeta_{i,j+1}^{n,p} - \zeta_{i,j-1}^{n,p}) +$$

$$+\vartheta^{n}_{\theta i,j,K}\ \frac{\tau}{r\Delta\theta}\ (\zeta^{n}_{i+1,j}-\zeta^{n}_{i-1,j})+\vartheta^{n}_{r i,j,K}\ \frac{\tau}{\Delta r}\ (\zeta^{n}_{i,j+1}-\zeta^{n}_{i,j-1})]\ -$$

$$-0{,}5(h+\zeta^{n,p}_{i,j})[\frac{\tau}{r\Delta\theta}\ (\zeta^{n,p}_{i+1,j}-\zeta^{n,p}_{i-1,j})+\frac{\tau}{\Delta r}\ (\zeta^{n,p}_{i,j+1}-\zeta^{n,p}_{i,j-1})]+$$

$$+0{,}5(h+\zeta^{n}_{i,j})[\frac{\tau}{r\Delta\theta}\ (\zeta^{n}_{i+1,j}-\zeta^{n}_{i-1,j})+\frac{\tau}{\Delta r}\ (\zeta^{n}_{i,j+1}-\zeta^{n}_{i,j-1})] \qquad (60)$$

для i = 1,…, M; j =4,…, JN-3, со значениями (46) для i = 0, M+1 и j =3, 2, 1, JN-2, JN-1, JN:

$$\zeta^{n,p+1}_{0,j}=\zeta^{n,p+1}_{M,j},\quad \zeta^{n,p+1}_{1,j}=\zeta^{n,p+1}_{M+1,j},\quad \zeta^{n,p+1}_{i,3}=\zeta^{n,p+1}_{i,4},\quad \zeta^{n,p+1}_{i,2}=\zeta^{n,p+1}_{i,3},$$

$$\zeta^{n,p+1}_{i,1}=\zeta^{n,p+1}_{i,2},\quad \zeta^{n,p+1}_{i,JN-2}=\zeta^{n,p+1}_{i,JN-3},\quad \zeta^{n,p+1}_{i,JN-1}=\zeta^{n,p+1}_{i,JN-2},\quad \zeta^{n,p+1}_{i,JN}=\zeta^{n,p+1}_{i,JN-1}. \qquad (61)$$

В продольном направлении для определения $\tilde{\vartheta}_{\theta i,j,k}$ введем обозначения

$$\tilde{B}_{i,j}=2+\frac{R_e}{A_h}\,\frac{2(r\Delta\theta)^2}{\tau};\quad \tilde{\mathrm{f}}_{i,j,k}=-\frac{(r\Delta\theta)^2R_e}{A_h}\,F^{n,p}_{\vartheta_{\theta i,j,k}}-\frac{R_e}{A_h}\,\frac{(r\Delta\theta)^2}{\Delta r^2}[\vartheta^{n}_{\theta i,j+1,k}+(\frac{2\Delta r^2}{\tau}-2)\,\vartheta^{n}_{\theta i,j,k}+\vartheta^{n}_{\theta i,j-1,k}], \qquad (62)$$

и напишем ($56'$)с ($57'$) для j =4, …, JN-3; k = 4,…, K-1, в виде систем уравнений:

$$\tilde{\vartheta}_{\theta 0,j,k}-\tilde{\vartheta}_{\theta M,j,k}=0, \qquad (57')$$

$$\tilde{\vartheta}_{\theta 0,j,k}-\tilde{B}_{j}\,\tilde{\vartheta}_{\theta 1,j,k}+\tilde{\vartheta}_{\theta 2,j,k}=\tilde{\mathrm{f}}_{1,j,k},$$

…

$$\tilde{\vartheta}_{\theta i-1,j,k}-\tilde{B}_{i,j}\,\tilde{\vartheta}_{\theta i,j,k}+\tilde{\vartheta}_{\theta i+1,j,k}=\tilde{\mathrm{f}}_{i,j,k},\qquad i=1,\dots,M, \qquad (63)$$

…

$$\tilde{\vartheta}_{\theta M-1,j,k}-\tilde{B}_{j}\,\tilde{\vartheta}_{\theta M,j,k}+\tilde{\vartheta}_{\theta M+1,j,k}=\tilde{\mathrm{f}}_{M,j,k},$$

$$\tilde{\vartheta}_{\theta 1,j,k}-\tilde{\vartheta}_{\theta M+1,j,k}=0. \qquad (64)$$

Добавляются вычисления: при k = 2,…, K-1 для j =1, 2, 3 по условиям ($57''$), для j = JN-2, JN-1, JN – по ($57'''$); для k = 1, 2, 3, K при j = 2, …, JN-1 – по условиям (57^{IV}) и (57^{V}).

Для определения $\vartheta^{n,p+1}_{\theta i,j,k}$ введем обозначения

$$B^{n,p+1}_{i,j}=2+\frac{R_e}{A_h}\,\frac{2\Delta r^2}{\tau};\quad \mathrm{f}^{n,p+1}_{i,j,k}=-\frac{\Delta r^2R_e}{A_h}\,F^{n,p}_{\vartheta_{\theta i,j,k}}-\frac{R_e}{A_h}\,\frac{\Delta r^2}{(r\Delta\theta)^2}[\tilde{\vartheta}_{\theta i+1,j,k}-(2-\frac{2(r\Delta\theta)^2}{\tau})\,\tilde{\vartheta}_{\theta i,j,k}+\tilde{\vartheta}_{\theta i-1,j,k}], \qquad (65)$$

при i = 1, …, M, k = 4,…, K-1, уравнение ($56''$) для j =4, …, JN-3 с условиями ($58''$) при j =3 и с ($58'''$) при j =JN-2, пишется в трех-диагональной форме:

$$\vartheta^{n,p+1}_{\theta i,3,k}=2{,}44\,\vartheta^{n,p+1}_{\theta_{*i,3,k}}\,ln\,\frac{\vartheta^{n,p+1}_{\theta_{*i,3,k}}\delta_t}{\nu_t}+5{,}5, \qquad (58'')$$

…

$$\vartheta^{n,p+1}_{\theta i,j-1,k} - B^{n,p+1}_{i,j}\,\vartheta^{n,p+1}_{\theta i,j,k} + \vartheta^{n,p+1}_{\theta i,j+1,k} = f^{n,p+1}_{i,j,k}, \quad j = 4, \ldots, JN-3; \qquad (66)$$

…

$$\vartheta^{n,p+1}_{\theta i,JN-2,k} = 2{,}44\,\vartheta^{n,p+1}_{\theta_{*i,JN-2,k}}\, ln\,\frac{\vartheta^{n,p+1}_{\theta_{*i,JN-2,k}}\delta_t}{\nu_t} + 5{,}5, \qquad (58''')$$

Добавляются вычисления: для i = 0 и i = M+1 – по ($58'$); при j =1, 2 - по ($58''$);j =JN-1, JN – по ($58'''$), для k = 1, 2 - по (58^{IV}), для k = 3 - по (58^{V}), для k = K - по (58^{VI}).

Определения значений $\tilde{\vartheta}_{ri,j,k}$, а затем $\vartheta^{n,p+1}_{ri,j,k}$ производятся аналогично.

Схему корректора замыкает вычисления значений $\zeta^{n,p+1}_{i,j}$ по (60) с (61).

Приведем ход решения системы ($57'$), (63), (64). Путем вычитания из второго уравнения первое уравнение, затем, сложением последних двух уравнений, из этой системы M+2 уравнений можно получить следующую систему M уравнений:

$$\begin{array}{l}
-\tilde{B}_j\,\tilde{\vartheta}_{\theta 1,j,k} + \tilde{\vartheta}_{\theta 2,j,k} + \tilde{\vartheta}_{\theta M,j,k} = \tilde{f}_{1,j,k}, \\
\tilde{\vartheta}_{\theta 1,j,k} - \tilde{B}_j\,\tilde{\vartheta}_{\theta 2,j,k} + \tilde{\vartheta}_{\theta 3,j,k} = \tilde{f}_{2,j,k}, \\
\ldots \\
\tilde{\vartheta}_{\theta M-2,j,k} - \tilde{B}_j\,\tilde{\vartheta}_{\theta M-1,j,k} + \tilde{\vartheta}_{\theta M,j,k} = \tilde{f}_{M-1,j,k}, \\
\tilde{\vartheta}_{\theta 1,j,k} + \tilde{\vartheta}_{\theta M-1,j,k} - \tilde{B}_j\,\tilde{\vartheta}_{\theta M,j,k} = \tilde{f}_{M,j,k}.
\end{array} \qquad (67)$$

Решению (67) для i = 1,…, M дополняются $\tilde{\vartheta}_{\theta M+1,j,k} = \tilde{\vartheta}_{\theta 1,j,k}$ и $\tilde{\vartheta}_{\theta 0,j,k} = \tilde{\vartheta}_{\theta M,j,k}$.

Система алгебраических уравнений (67) в матричной форме имеет вид:

$$M_p\tilde{U} = \tilde{F}, \qquad (68)$$

где M_p - «почти трех-диагональная» матрица, $\tilde{U}$, $\tilde{F}$ - матрицы векторы.

К особенностям алгоритма Бунемана относятся: представление по двум крайним точкам на оси основного потока $r\theta$ граничных условий периодичности рассчитывается переходу к «почти трех-диагональной» матрице разностной схемы; алгоритм основывается на циклическое понижение ее порядка; выбор числа узлов допускается только для $M = 2^{r+1}$, где r = 1, 2, …,ℓ-1 - число порядков понижения; составляются рекуррентные соотношения как для пониженных и тождественных систем уравнений, так и в коэффициентах прогонок.

При решения (67), согласно алгоритма Бунемана для последовательного понижения: сначала второе уравнение умножаем на

$\tilde{B}_j$, а затем слагаем первые три уравнения и исключаем неизвестные $\tilde{\vartheta}_{\theta 1,j,k}$, $\tilde{\vartheta}_{\theta 3,j,k}$ как результат понижения порядка системы. Продолжая подобную процедуру можно исключить другие неизвестные с нечетными индексами по *i*. Но, для последнего уравнения пониженного порядка системы, чтобы исключить $\tilde{\vartheta}_{\theta 1,j,k}$ и $\tilde{\vartheta}_{\theta M-1,j,k}$, умножением оба части последнего уравнения на $\tilde{B}_j$ ($\tilde{B}_j = \tilde{B}_{i,j}$), затем слагая первое, предпоследнее и последнее уравнения, получим пониженную:

$$(2-\tilde{B}_j^2)\tilde{\vartheta}_{\theta 2,j,k} + \tilde{\vartheta}_{\theta 4,j,k} + \tilde{\vartheta}_{\theta M,j,k} = \tilde{\mathrm{f}}_{1,j,k} + \tilde{\mathrm{f}}_{3,j,k} + \tilde{B}_j\,\tilde{\mathrm{f}}_{2,j,k},$$

$$\tilde{\vartheta}_{\theta 2,j,k} + (2-\tilde{B}_j^2)\tilde{\vartheta}_{\theta 4,j,k} + \tilde{\vartheta}_{\theta 6,j,k} = \tilde{\mathrm{f}}_{3,j,k} + \tilde{\mathrm{f}}_{5,j,k} - \tilde{B}_j\,\tilde{\mathrm{f}}_{4,j,k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tilde{\vartheta}_{\theta i-2,j,k} + (2-\tilde{B}_j^2)\tilde{\vartheta}_{\theta i,j,k} + \tilde{\vartheta}_{\theta i+2,j,k} = \tilde{\mathrm{f}}_{i-1,j,k} + \tilde{\mathrm{f}}_{i+1,j,k} + \tilde{B}_j\,\tilde{\mathrm{f}}_{i,j,k}, \quad i = 4,6,\ldots,M-2, \quad (69)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tilde{\vartheta}_{\theta 2,j,k} + \tilde{\vartheta}_{\theta M-2,j,k} + (2-\tilde{B}_j^2)\tilde{\vartheta}_{\theta M,j,k} = \tilde{\mathrm{f}}_{1,j,k} + \tilde{\mathrm{f}}_{M-1,j,k} + \tilde{B}_j\,\tilde{\mathrm{f}}_{M,j,k}.$$

Поскольку, в полученной системе понижено при $r = 2$, $M = 2^{r+1} = 8$, а при $r = 3$, $M = 2^{r+1} = 16$ для $2^{r+1} = 16$ уравнений, а поиск ее решения опирается на аналогичном втором понижении. Для эквивалентной системы к (67) система (69) дополняется системой:

$$\tilde{\vartheta}_{\theta 1,j,k} = (\tilde{\vartheta}_{\theta 2,j,k} + \tilde{\vartheta}_{\theta M,j,k} - \tilde{\mathrm{f}}_{1,j,k})/\tilde{B}_j; \qquad \tilde{\vartheta}_{\theta 3,j,k} = (\tilde{\vartheta}_{\theta 2,j,k} + \tilde{\vartheta}_{\theta 4,j,k} - \tilde{\mathrm{f}}_{3,j,k})/\tilde{B}_j; \ \ldots$$

$$\tilde{\vartheta}_{\theta M-3,j,k} = (\tilde{\vartheta}_{\theta M-2,j,k} + \tilde{\vartheta}_{\theta M-4,j,k} - \tilde{\mathrm{f}}_{M-3,j,k})/\tilde{B}_j; \quad \tilde{\vartheta}_{\theta M-1,j,k} = (\tilde{\vartheta}_{\theta M-2,j,k} + \tilde{\vartheta}_{\theta M,j,k} - \tilde{\mathrm{f}}_{M-1,j,k})/\tilde{B}_j. \quad (70)$$

Приводим второй шаг понижения системы (69), обозначая: $-A_j^{(1)} = (2-\tilde{B}_j^2)$; $\quad \tilde{\mathrm{f}}^{(1)}_{2,j,k} = \tilde{\mathrm{f}}_{1,j,k} + \tilde{\mathrm{f}}_{3,j,k} + \tilde{B}_j\,\tilde{\mathrm{f}}_{2,j,k}$; $\quad \tilde{\mathrm{f}}^{(1)}_{4,j,k} = \tilde{\mathrm{f}}_{3,j,k} + \tilde{\mathrm{f}}_{5,j,k} + \tilde{B}_j\,\tilde{\mathrm{f}}_{4,j,k}$;…

$$\tilde{\mathrm{f}}^{(1)}_{M-2,j,k} = \tilde{\mathrm{f}}_{M-3,j,k} + \tilde{\mathrm{f}}_{M-1,j,k} + \tilde{B}_j\,\tilde{\mathrm{f}}_{M-2,j,k}; \qquad \tilde{\mathrm{f}}^{(1)}_{M,j,k} = \tilde{\mathrm{f}}_{M-1,j,k} + \tilde{\mathrm{f}}_{1,j,k} + \tilde{B}_j\,\tilde{\mathrm{f}}_{M,j,k}. \quad (71)$$

Аналогично предыдущему случаю, обе стороны второго уравнения (69) будем умножать на $-A_j^{(1)}$, а затем слагая первые три уравнения, можем исключить неизвестные $\tilde{\vartheta}_{\theta 2,j,k}$, $\tilde{\vartheta}_{\theta 6,j,k}$. Также можно исключить другие неизвестные с удвоенными нечетными индексами по $2i_1$, (i_1=1, 2, …, $2^{(r-1)}$-1). Умножая сначала оба части последнего уравнения системы (69) на $-A_j^{(1)}$, затем слагая это уравнение, первое и предпоследнее *M*-2 = 2($2^{(r-1)}$-1) уравнение, исключаются $\tilde{\vartheta}_{\theta 2,j,k}$, $\tilde{\vartheta}_{\theta M-2,j,k}$. Итак, можно получить следующую пониженную систему. Для эквивалентной системы к (69) следующей пониженной системы дополняется со следующей эквивалентной системой, и так далее.

Продолжая процедуру последовательного понижения порядка системы уравнений для $r = 4$, $M = 2^{r+1} = 32$ и для ($r = 1, 2, \ldots, \ell$-1), будем выразить ход решения в общих видах.

Начнем сопоставления для записи в рекуррентных соотношениях. При

$$A_j^{(0)} = -\tilde{B}_j; \quad A_j^{(1)} = -(2\mathrm{I}_p - A_j^{(0)^2}) = -2 + A_j^{(0)^2}; \quad \mathrm{I}_p = 1; \; T = 1; \quad \tilde{f}_{i,j,k}^{(0)} = \tilde{f}_{i,j,k}, \quad (72)$$

правую сторону (71) можно записать как

$$\tilde{f}_{i,j,k}^{(1)} = \tilde{f}_{i-1,j,k} + \tilde{f}_{i+1,j,k} + \tilde{B}_j\,\tilde{f}_{i,j,k} = A_j^{(0)^{-1}} A_j^{(1)}\,\tilde{f}_{i,j,k}^{(0)} + \tilde{f}_{i-1,j,k}^{(0)} + \tilde{f}_{i+1,j,k}^{(0)} - 2A_j^{(0)^{-1}}\,\tilde{f}_{i,j,k}^{(0)}. \quad (73)$$

Для системы (71) начиная также, как в (73), будем определить

$$\tilde{f}_{i,j,k}^{(1)} = A_j^{(1)}\,\mathrm{P}_{i,j,k}^{(1)} + \mathrm{q}_{i,j,k}^{(1)}, \qquad i = 2, 4, \ldots, 2^{\ell+1} = \mathrm{M}. \quad (74)$$

где

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{2,j,k}^{(1)} = A_j^{(0)^{-1}}\,\tilde{f}_{2,j,k}^{(0)}, \quad \mathrm{q}_{2,j,k}^{(1)} = \tilde{f}_{1,j,k}^{(0)} + \tilde{f}_{3,j,k}^{(0)} - 2\mathrm{P}_{2,j,k}^{(1)},\\
&\mathrm{P}_{i,j,k}^{(1)} = A_j^{(0)^{-1}}\,\tilde{f}_{i,j,k}^{(0)}, \quad \mathrm{q}_{i,j,k}^{(1)} = \tilde{f}_{i-1,j,k}^{(0)} + \tilde{f}_{i+1,j,k}^{(0)} - 2\mathrm{P}_{i,j,k}^{(1)}, \qquad i = 4, 6, \ldots, \mathrm{M}-2. \quad (75)\\
&\mathrm{P}_{M,j,k}^{(1)} = A_j^{(0)^{-1}}\,\tilde{f}_{M,j,k}^{(0)}, \quad \mathrm{q}_{M,j,k}^{(1)} = \tilde{f}_{1,j,k}^{(0)} + \tilde{f}_{M-1,j,k}^{(0)} - 2\mathrm{P}_{M,j,k}^{(1)}.
\end{aligned}$$

В главном, для $r = 1, 2, \ldots, \ell$-1,

$$\tilde{f}_{i,j,k}^{(r+1)} = A_j^{(r+1)}\,\mathrm{P}_{i,j,k}^{(r+1)} + \mathrm{q}_{i,j,k}^{(r+1)}, \qquad i = \mathrm{i}_\ell \cdot 2^{r+1}, \quad \mathrm{i}_\ell = 1, 2, \ldots, 2^{r-\ell}, \quad (76)$$

где

$$\mathrm{P}_{i,j,k}^{(r+1)} = \mathrm{P}_{i,j,k}^{(r)} - (A_j^{(r)})^{-1}\,(\mathrm{P}_{i-2^r,j,k}^{(r)} + \mathrm{P}_{i+2^r,j,k}^{(r)} - \mathrm{q}_{i,j,k}^{(r)}), \quad \mathrm{q}_{i,j,k}^{(r+1)} = \mathrm{q}_{i-2^r,j,k}^{(r)} + \mathrm{q}_{i+2^r,j,k}^{(r)} - 2\mathrm{P}_{i,j,k}^{(r+1)}. \quad (77)$$

Наконец,

$$\tilde{f}_{2^\ell,j,k}^{(\ell+1)} = B^{(\ell+1)}\,\mathrm{P}_{2^\ell,j,k}^{(\ell+1)} + \mathrm{q}_{2^\ell,j,k}^{(\ell+1)}, \qquad B^{(\ell+1)} = 4\mathrm{I}_p - (A_j^{(\ell)})^2, \quad (78)$$

где

$$\mathrm{P}_{2^\ell,j,k}^{(\ell+1)} = \mathrm{P}_{2^\ell,j,k}^{(\ell)} - (A_j^{(\ell)})^{-1}(2\mathrm{P}_{2^{\ell+1},j,k}^{(\ell)} - \mathrm{q}_{2^\ell,j,k}^{(\ell)}), \quad \mathrm{q}_{2^\ell,j,k}^{(\ell+1)} = 2\mathrm{q}_{2^{\ell+1},j,k}^{(\ell)} - 4\mathrm{P}_{2^\ell,j,k}^{(\ell+1)}. \quad (79)$$

Тогда $B^{(\ell+1)}\,\tilde{\vartheta}_{\theta 2^\ell,j,k} = B^{(\ell+1)}\,\mathrm{P}_{2^\ell,j,k}^{(\ell+1)} + \mathrm{q}_{2^\ell,j,k}^{(\ell+1)}$, так что $\tilde{\vartheta}_{\theta 2^\ell,j,k} = \mathrm{P}_{2^\ell,j,k}^{(\ell+1)} + B^{(\ell+1)^{-1}}\,\mathrm{q}_{2^\ell,j,k}^{(\ell+1)}$. (80)

Обратной подстановкой, можно выразить $\mathrm{P}_{i,j,k}^{(r)}$ и $\mathrm{q}_{i,j,k}^{(r)}$ в переменных $\tilde{\vartheta}_{\theta i,j,k}$.

$$\mathrm{P}_{i,j,k}^{(r)} = \tilde{\vartheta}_{\theta i,j,k} + (-1)^{r+1}\,\mathrm{S}_j^{(r)}\left\{\sum_{\ell=1}^{2^{r-1}}\left(\tilde{\vartheta}_{\theta i-(2\ell-1),j,k} + \tilde{\vartheta}_{\theta i+(2\ell-1),j,k}\right)\right\}, \qquad \mathrm{S}_j^{(r)} = (A_j^{(r-1)} \cdot A_j^{(r-2)} \cdot \ldots \cdot A_j^{(0)})^{-1}, \quad (81)$$

$$\mathrm{q}_{i,j,k}^{(r)} = \tilde{\vartheta}_{\theta i-2^r,j,k} + (-1)^r\,\mathrm{S}_j^{(r)}\,A_j^{(r)}\left\{\sum_{\ell=1}^{2^{r-1}}\left(\tilde{\vartheta}_{\theta i-(2\ell-1),j,k} + \tilde{\vartheta}_{\theta i+(2\ell-1),j,k}\right)\right\} + \tilde{\vartheta}_{\theta i+2^r,j,k}. \quad (82)$$

Далее, для определения $\vartheta_{\theta_{i,j,k}}^{n,p+1}$ система разностных уравнений (66) с граничными условиями ($58''$)-($58'''$), приводятся к трех-диагональным формулам, использующие в изменяющимся *j*. При *i* = 1, …, M; *k* = 4,…, K-1, в (66) выводятся формулы прогонки

$$\vartheta_{\theta_{i,j,k}}^{n,p+1} = X_{j,k}^{n,p+1} \cdot \vartheta_{\theta_{i,j+1,k}}^{n,p+1} + Y_{i,j,k}^{n,p+1}, \qquad j = 4, \ldots, JN\text{-}3. \tag{83}$$

При *j* =3, *k* = 4,…, K-1, сопоставлением (83) с ($58''$) получим:

$$X_{3,k}^{n,p+1} = 1, \quad Y_{i,3,k}^{n,p+1} = 0, \tag{84}$$

$$X_{j,k}^{n,p+1} = \frac{1}{B_i^{n,p+1} - X_{j-1,k}^{n,p+1}}; \quad Y_{i,j,k}^{n,p+1} = \frac{Y_{i,j-1,k}^{n,p+1} - f_{i,j,k}^{n,p+1}}{B_i^{n,p+1} - X_{j-1,k}^{n,p+1}}, \; j = 4, \ldots, JN\text{-}3; \; k = 4, \ldots, K\text{-}1, \tag{85}$$

Далее, рекуррентно определяются $X_{4,k}^{n,p+1}$; $Y_{i,4,k}^{n,p+1}$, $X_{5,k}^{n,p+1}$; $Y_{i,5,k}^{n,p+1}$, …, $X_{\mathrm{JN}\text{-}3,k}^{n,p+1}$; $Y_{i,\mathrm{JN}\text{-}3,k}^{n,p+1}$.

Из условия ($58''$) определяется $\vartheta_{\theta_{i,3,k}}^{n,p+1}$, а из условий ($58'''$) определяется значения $\vartheta_{\theta_{i,JN-2,k}}^{n,p+1}$, и по формуле (83) в обратной последовательности рекуррентно определяются значения $\vartheta_{\theta_{i,JN-3,k}}^{n,p+1}$, $\vartheta_{\theta_{i,JN-4,k}}^{n,p+1}$, … , $\vartheta_{\theta_{i,5,k}}^{n,p+1}$, $\vartheta_{\theta_{i,4,k}}^{n,p+1}$. Сюда добавляются: $\vartheta_{\theta_{0,j,k}}^{n,p+1}$, $\vartheta_{\theta_{M+1,j,k}}^{n,p+1}$ при *i* =0, M+1 из условия ($58'$), а по вертикали: $\vartheta_{\theta_{i,j,1}}^{n,p+1}$, $\vartheta_{\theta_{i,j,2}}^{n,p+1}$ для
k =1, 2; $\vartheta_{\theta_{i,j,3}}^{n,p+1}$ для *k* = 3; $\vartheta_{\theta_{i,j,K}}^{n,p+1}$ для *k* = K.

Изложенные последовательности с подробными образцами аналогий действий внятно отражает идею организации общего алгоритма счета поочередного определения величин $\vartheta_{\theta i,j,k}^{n,1}$, $\vartheta_{r i,j,k}^{n,1}$, $\zeta_{i,j}^{n,1}$ попеременно выполняемых $\tilde{\vartheta}_{\theta i,j,k}$, $\tilde{\vartheta}_{r i,j,k}$ и $\vartheta_{\theta i,j,k}^{n,p+1}$, $\vartheta_{r i,j,k}^{n,p+1}$, $\zeta_{i,j}^{n,p+1}$ при начальном (43) до выполнения (51) каждого шага [*n*, *n*+1] в достаточном *n* для установления схем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Buzbee B.L., Golub G.H., Nielson C.W. On direct methods for solving Poissons equations // J. on numerical analysis. – V. 7, n. 4, SIAM, 1970, Ser. B. – P. 627-656.
2. Розовский И.Л. Движение воды на повороте открытого русла. г. Киев, Изд АН УССР, 1957. -188 с.
3. Tomidokoro G. Three-dimensional numerical model for open channel flows // A collection of technical papers International symposium on

computational fluid dynamics. -Nagoya, 1989, Shinshu University, Japan. – P. 995-1000.
4. Хинце И. О. Турбулентность, ее механизм и теория. М., Физматгиз, 1963. - 680 с.
5. Христов Х.И. Полностью развитое течение вязкой несжимаемой жидкости в тороидальной трубе круглого поперечного сечения для широкого интервала числа Дийна. – Новосибирск: 1978. С. 122-138.
6. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. –225 с.
7. Токтакунов Т., Осмонов К.Т. Трехмерный модель для численного исследования движения вязкой жидкости на закруглении открытого канала. Вестник КГУСТА. № 4 (74). - Бишкек, 2021. – С. 700-711.
8. Осмонов К.Т. Трехмерная задача течения вязкой жидкости по открытому каналу в постановке численного решения. Вестник КГУСТА. № 4 (74). - Бишкек, 2021. – С. 689-699.