УДК 532.546

АЛГОРИТМ МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ РАСЧЕТА ГЕМОДИНАМИКИ В ОДИНОЧНОМ СОСУДЕ

Чечейбаев А.Б., Байышева Ж.Б.
Инновационный колледж АУЦА, КГМА им. И. Ахунбаева, г. Бишкек

Предлагается вычислительный алгоритм метода крупных частиц для моделирования гемодинамики в одиночном кровеносном сосуде. Описываются разностные схемы метода крупных частиц.

Ключевые слова: гемодинамика, математическая модель, метод крупных частиц, алгоритм, разностные схемы.

ОБОЧОЛОНГОН КАН ТАМЫРДАГЫ ГЕМОДИНАМИКАЛЫК АГЫМДАРДЫ ЭСЕПТӨӨ ҮЧҮН ЧОҢ БӨЛҮКЧӨЛӨР ЫКМАСЫНЫН АЛГОРИТМИ

Чечейбаев А.Б., Байышева Ж.Б.
БААУнун Инновациялык колледжи, И. Ахунбаев атындагы КММА

Обочолонгон кан тамырдагы гемодинамикалык агымдардын динамикасын моделдештирүү үчүн чоң бөлүкчөлөр ыкмасынын эсептөө алгоритми сунушталат. Чектүү айырмалар сунушталат.

Баштапкы сөздөр: Гемодинамика, математикалык модель, чон бөлүкчөлөр ыкмасы, алгоритм, сандык айырмалар.

ALGORITHM OF THE LARGE-PARTICLE METHOD TO DESCRIBE HEMODYNAMICS IN A SINGLE VESSEL

Checheibaev A., **Baiysheva Zh.**
Technical school of Innovation of American University of Central Asia,
Kyrgyz State Medical Academy

The computational numerical algorithm of Large-Particle Method has been proposed to predict hemodynamic flows in blood vessel. The finite-difference schemes are presented.
Keywords: the hemodynamics, mathematical model, the Large-Particle Method, algorithm, difference schemes.

В настоящее время становится все более важным вопрос разработки полномасштабных моделей кровеносной системы человека, что позволяет получать детальную пространственно-временную картину течения крови с учетом влияния гемодинамики различных сосудов [1].

В силу того, что возможности экспериментальных медицинских исследований гемодинамических процессов существенно ограничены, крайне важное значение приобретает разработка эффективных вычислительных алгоритмов, а также проведение с помощью них широкомасштабных вычислительных экспериментов [1].

Математическая модель течения крови в одиночном сосуде представляет собой систему нелинейных гиперболических уравнений в частных производных [1, 2]:

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial su}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)=f_e+f_R, \tag{2}$$

$$s=s(p), \tag{3}$$

где t - время, x - продольная координата, $s(x,t)$ – площадь поперечного сечения сосуда, $u(x,t) -$ осредненная по поперечному сечению скорость движения крови вдоль сосуда, ρ – плотность крови, которая принимается постоянной, f_e – приведенная внешняя сила, f_R – приведенная сила сопротивления (трения), обусловленная вязкими свойствами крови.

Зависимость площади поперечного сечения от давления может рассчитываться, например, с помощью следующей упрощенной модельной зависимости [3]:

$$s = s(p) = \begin{cases} s_{min} + \frac{s_{max}-s_{min}}{p_{max}-p_{min}} \cdot (p - p_{min}), & p_{min} \le p \le p_{max} \\ s_{min}, & p < p_{min} \\ s_{max}, & p > p_{max} \end{cases} \qquad (4)$$

Как видно из (1) – (3), математическая модель движения крови в одиночном сосуде состоит из уравнения неразрывности и уравнения динамики крови в сосуде, а также из уравнения состояния для сосуда, характеризующего упруго-пластичный характер зависимости изменения площади от давления в крови.

Метод крупных частиц [4-5 и др.], разработанный крупным советским и российским ученым Ю.М. Давыдовым, стал одним из мощных инструментов для решения современных задач механики сплошных и сыпучих сред наряду с такими методами, как метод конечных элементов и метод конечных объемов.

Приведем ниже вычислительный алгоритм метода крупных частиц для моделирования движения крови в одиночном сосуде человека.

Для решения системы (1)-(3) область интегрирования покрывается неподвижной в пространстве эйлеровой сеткой в декартовой системе координат.

Алгоритм метода крупных частиц для расщепления системы (1)-(3) состоит из трех этапов.

<u>Эйлеров этап</u>. На этом этапе, согласно описанию алгоритма метода крупных частиц [4-5], изменяются лишь величины, относящиеся к ячейке в целом, а площадь поперечного сечения сосуда предполагается заторможенной. Здесь исходная система (1)-(3) сводится к решению только уравнения (2) , записанного в следующей форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = f_e + f_R. \qquad (5)$$

Аппроксимируя дифференциальное уравнение (4) конечными разностями, для ячейки с адресом (i) в момент времени $t = t^n$ на эйлеровом этапе получаем явные разностные схемы первого порядка точности по времени и второго по пространству:

$$\tilde{u}_i^n = u_i^n + \Delta t \cdot \left[\frac{u_{i-\frac{1}{2}}^n - u_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \cdot u_i^n + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{p_{i-\frac{1}{2}}^n - p_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} + (f_e)_i^n + (f_R)_i^n\right]. \qquad (6)$$

Так, на эйлеровом этапе метода крупных частиц мы находим значения скоростей кровяного потока внутри одиночного сосуда $\tilde{u}_i^n$.

<u>Лагранжев этап.</u> Здесь мы вычисляем эффекты переноса, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю эйлерову сетку. Здесь находятся за время Δt «потоки масс» $\Delta \mathrm{M}^n$ через границы эйлеровых ячеек. Фактически «потоками масс» в нашем случае служат потоки объемов крови через границы эйлеровых ячеек.

Разностный аналог уравнения неразрывности (1) записывается в следующем виде:

$$s_i^{n+1} \cdot \Delta x = s_i^n \cdot \Delta x + \Delta \mathrm{M}_{i-\frac{1}{2}}^n - \Delta \mathrm{M}_{i+\frac{1}{2}}^n \qquad (7)$$

Будем определять «потоки масс» на лагранжевом этапе с помощью следующих формул:

$$\Delta \mathrm{M}_{i-\frac{1}{2}}^n = \langle s_{i-\frac{1}{2}}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^n \rangle \cdot \Delta t,$$

$$\Delta \mathrm{M}_{i+\frac{1}{2}}^n = \langle s_{i+\frac{1}{2}}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^n \rangle \cdot \Delta t, \qquad (8)$$

где «потоки масс» через границы эйлеровых ячеек могут быть рассчитаны с помощью формул первого или второго порядков точности [4-5].

Приведем формулы первого порядка точности для расчета, например, $\Delta \mathrm{M}_{i+\frac{1}{2}}^n$.

Если $\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n \geq 0$, то $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^n = (\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n)/2$, $s_{i+\frac{1}{2}}^n = s_i^n$. (9)

Если $\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n < 0$, то $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^n = (\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n)/2$, $s_{i+\frac{1}{2}}^n = s_{i+1}^n$.

Для вычисления потоков $\Delta \mathrm{M}^n$ можно также использовать формулы второго порядка точности.

Если $\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n > 0$ и $\tilde{u}_{i+1/2}^n = \tilde{u}_i^n + (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x})_i^n = \tilde{u}_i^n + \frac{\tilde{u}_{i+1}^n + \tilde{u}_{i-1}^n}{4} > 0$, то $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^n = \tilde{u}_i^n + \frac{\tilde{u}_{i+1}^n + \tilde{u}_{i-1}^n}{4}$, $s_{i+\frac{1}{2}}^n = s_i^n + \frac{s_{i+1}^n + s_{i-1}^n}{4}$. (10)

Если $\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n < 0$ и $\tilde{u}_{i+1/2}^n = \tilde{u}_{i+1}^n - (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x})_{i+1}^n = \tilde{u}_{i+1}^n - \frac{\tilde{u}_{i+2}^n + \tilde{u}_i^n}{4} < 0$, то $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^n = \tilde{u}_{i+1}^n - \frac{\tilde{u}_{i+2}^n + \tilde{u}_i^n}{4}$, $s_{i+\frac{1}{2}}^n = s_{i+1}^n - \frac{s_{i+2}^n + s_i^n}{4}$. В случае, если $\tilde{u}_i^n + \tilde{u}_{i+1}^n > 0$ и $\tilde{u}_{i+1/2}^n = \tilde{u}_i^n + (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x})_i^n = \tilde{u}_i^n + \frac{\tilde{u}_{i+1}^n + \tilde{u}_{i-1}^n}{4} < 0$, то полагаем, что $\Delta \mathrm{M}_{i+\frac{1}{2}}^n = 0$.

Необходимо отметить, что возможны и другие способы вычисления величин $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^n$ $s_{i+\frac{1}{2}}^n$, вытекающие из особенностей рассматриваемого течения.

Заключительный этап.

На этом этапе находятся окончательные значения площади поперечного сечения кровеносного сосуда потока на фиксированной сетке в момент времени $t^{n+1} = t^n + \Delta\mathrm{t}$.

Новые значения площади поперечного сечения определяются согласно следующей разностной формуле:

$$s_i^{n+1} = s_i^n + \frac{\Delta \mathrm{M}_{i-\frac{1}{2}}^n - \Delta \mathrm{M}_{i+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \qquad (11)$$

Далее, для тестирования вычислительного алгоритма метода крупных частиц может быть рассмотрена следующая тестовая задача, допускающая аналитическое решение. Исходная система (1) – (3) записывается с правыми частями специального вида [1]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho \cdot c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = f_e + f_R, \qquad (13)$$

$$s = s(p), \qquad (14)$$

Система уравнений (12)-(14) может быть получена из системы (1)-(3) при пренебрежении конвективными слагаемыми и в предположении о постоянной скорости распространения пульсовой волны [2].

На левой границе области интегрирования известен расход крови:

$$Q_L(t) = \begin{cases} 8000 \cdot \left(-\frac{5}{9} \cdot \psi^2 + \frac{1}{3} \cdot \psi\right), \ \psi \le 0{,}3 \\ 0, \ \psi > 0{,}3 \end{cases} \qquad (15)$$

Здесь $\psi = \left\{\frac{t}{0{,}8}\right\}$, $\{x\}$ – функция вычисления дробной части заданного числа x; расход крови измеряется в $\frac{\text{см}^3}{\text{с}}$.

Отметим, что граничное условие (15) моделирует сердечный выброс в системе кровообращения человека [1-2].

На правой границе области интегрирования поддерживается постоянное давление:

$$p_R = 100 \text{ мм рт.ст} \qquad (16)$$

Итак, мы привели разностные схемы метода крупных частиц для расчета динамики крови в одиночном сосуде (6)-(11), а также условия тестовой задачи (12)-(14) с граничными условиями (15)-(16).

ЛИТЕРАТУРА

1. Астраханцева Е.В. Численное моделирование гемодинамики крупных кровеносных сосудов. Автореферат дисс. к.ф.м.н. – М.: МАИ, 2006. – 21 с.
2. Абакумов М.В., Есикова Н.Б., Мухин С.И., Соснин Н.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностная схема решения задач гемодинамики на графе // Препринт. – М.: Диалог-МГУ, 1998.
3. Свиридова Н.В., Власенко В.Д. Моделирование гемодинамических процессов сердечно-сосудистой системы на основе данных периферической артериальной пульсации. // Математическая биология и биоинформатика, 2014, Т. 9, №1, с. 195-205.

4. Ю.М. Давыдов. Крупных частиц метод. В кн.: Математическая энциклопедия. Т. 3. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – С. 125-129.
5. Yuri M. Davydov. Large-Particle Method. In.: Encyclopaedia of Mathematics, vol.5. -Dordrecht/Boston/London: Kluwer academic publishers, 1990, p.p. 358-360.