УДК 519. 633(075)

АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Осмонканов А.М., Асанкожоева Н.Т.
КГТУ им. И.Раззакова

В данной статье приводится сравнение методов решения уравнения теплопроводности. Подробно рассмотрено решение аналитическим методом, а также разобран численное решение уравнения теплопроводности. Для решения уравнения теплопроводности использована метод конечных разностей и составлена программа на языке Java.

Ключевые слова: метод прогонки, системы линейных алгебраических уравнений, уравнения теплопроводности, дифференциальное уравнение, метод конечных разностей, температурное поле, граничные условия.

ЖЫЛУУЛУК ӨТКӨРҮМДҮҮЛҮК ТЕҢДЕМЕСИН ЧЕЧҮҮНҮН АНАЛИТИКАЛЫК ЖАНА САНДЫК ЫКМАЛАРЫ

Осмонканов А. М., Асанкожоева Н.Т.
И. Раззаковатындагы КМТУ

Бул макалада жылуулук теңдемесин чечүү ыкмалары салыштырылат. Аналитикалык ыкма менен чечүү кеңири каралып, жылуулук теңдемесинин сандык чечими талданат. Жылуулук теңдемесин чечүү үчүн чектүү айырма ыкмасы колдонулган жана Java программасы түзүлгөн.

Баштапкы сөздөр: талдоо ыкмасы, сызыктуу алгебралык теңдемелер системасы, жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемелери, дифференциалдык теңдеме, чектүү айырмачылык методу, температуралык талаа, чек ара шарттары.

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS FOR SOLVING THE HEAT EQUATION

Osmonkanov A.M., Asankozhoeva N.T.
KSTU named of I. Razzakov

This article compares the methods for solving the heat equation. The solution by the analytical method is considered in detail, and the numerical solution of the heat equation is analyzed. To solve the heat equation, the finite difference method was used and a Java program was compiled.
Key words*:* sweep method, systems of linear algebraic equations, heat conduction equations, differential equation, finite difference method, temperature field, boundary conditions.

Для решения задач теплопроводности в твердых телах сложной формы используются аналитические и численные методы. Решения возможны при известных краевых условиях, включающих начальное распределение температур в теле и граничные условия на поверхности тела, которые могут быть заданы одним из трех способов: температурой поверхности, тепловым потоком и коэффициентом теплоотдачи [1,2,3].

Классические методы математической физики позволяют решать уравнение теплопроводности только для частных случаев, когда начальные и граничные условия имеют достаточно простой вид.

Однако, для построения математических моделей адекватной реальному процессу, необходимо учитывать зависимость от температуры теплофизических характеристик материала, изменение формы тепла, возможность фазовых превращений – это приводит к необходимости использовать приближенные методы расчета.

Из численных методов решения задач теплопроводности в настоящее время наиболее ценным и широко используемым является метод конечных разностей, основанный на замене производных, входящих в дифференциальное уравнение, разностными отношениями.

Для начала сформулируем задачу в дифференциальном виде. Так как распространение тепла фактически происходит по координатной оси, то уравнение теплопроводности будет одномерным:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \qquad (1)$$

где u – температура, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, k – коэффициент теплопроводности, c – удельная теплоемкость, ρ - плотность (в задаче диффузии u – концентрация диффундирующего вещества, $a^2 = \frac{d}{c}$, d - коэффициент диффузии, c – коэффициент пористости среды, который определяется отношением объема пор к рассматриваемому объему), x=0 и x=L левый и правый концы отрезка изменения пространственной переменной, t=0 и t=T – моменты начала и окончания процесса. На множестве $\overline{D} = [0, L] \times [0, T]$ рассматриваются различные начально-краевые задачи для уравнения (рис. 1.1)

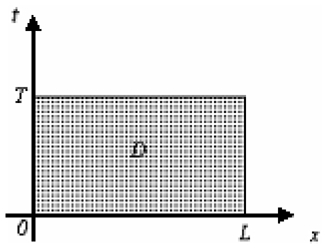

Рис. 1.1 - Область D ограниченная прямоугольником

Пользуясь явной схемой, найти приближенное решение начально-краевой задачи вида:

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 \le x \le 0{,}6$ $\quad 0 < t < 0{,}01$,

$u(x,0) = 3x(1-x) + 0{,}12,$ (начальное условие)

$u(0,\, t) = 2(t + 0{,}06),$ $\quad 0 < t < 0{,}01$ (краевое условие на левой границе)

$u(0{,}6,\, t) = \psi(t),$ $\quad 0 < t < 0{,}01$ (краевое условие на правой границе).

Используя метод сеток, составить решение смешанной задачи для дифференциального уравнения параболического типа $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (уравнение теплопроводности) при заданных начальных условиях: $u(x,0)=f(x),\quad u(0,t)=\varphi(t),\quad u(0{,}6,t)=\psi(t),$ где $x\in[0;\,0{,}6].$ Решение выполнить при $h=0{,}1$ для $t\in[0;\,0{,}01]$ с четырьмя десятичными знаками, считая $\sigma=1/6.$

Решение:

Сравнивая с общей постановкой задачи, получаем $a^2=1,$ $f(x)=3x(1-x)+0{,}12$ $\quad\varphi(t)=2(6+0{,}06)$ $\;\psi(t)=0{,}84$

$u(x,0)=3x(1-x)+0{,}12,\quad u(0,\,t)=2(t+0{,}06),\quad u(0{,}6;\,t)=0{,}84.$

Уравнение теплопроводности решается методом сеток постепенным переходом от значений функций $u(x_i,\,t_i)$ к значениям $u(x_i,t_{j+1});$ причем $t_{j+1}=t_j+k,$ где $k=h^2/6=0{,}01/6=0{,}0017.$

Вычисления производим по формуле

$$u_{i,\,j+1}=\frac{1}{6}\left(u_{i+1,\,j}+4u_{ij}+u_{i-1,\,j}\right)\ (i=1,2,3,4,5,6;\ j=1,2,3,4,5,6).$$

Все расчеты приведены в таблице:

j	i	0	1	2	3	4	5	6
	x_i \ t_j	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0	0,12	0,39	0,60	0,75	0,84	0,87	0,84
1	0,0017	0,1233	0,3800	0,5900	0,7400	0,8300	0,8600	0,84
2	0,0033	0,1267	0,6372	0,5800	0,7300	0,8200	0,8517	0,84
3	0,0500	0,1300	0,3659	0,5704	0,7200	0,8103	0,8445	0,84
4	0,0067	0,1333	0,3607	0,5612	0,7101	0,8010	0,8380	0,84
5	0,0083	0,1367	0,3562	0,5526	0,7004	0,7920	0,8322	0,84
6	0,01	0,1400	0,3524	0,5445	0,6910	0,7834	0,8268	0,84

2. Программа на языке Java:

```
public class Calculator {
    private double u[][];
    private double x[] = {0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6};
    private double t[];
    private double k = 0.0017;
    public void initialize(){//Иницилизация
        t = new double[7];
        t[0] = 0;
        for(int j = 0;j<6;j++){
            t[j+1] = t[j]+k;
        }
        u = new double[7][7];
        for(int i = 0;i<=6;i++){
            u[i][0] = 3*x[i]*(1-x[i])+0.12;
            u[0][i] = 2*(t[i]+0.06);
            u[6][i] = 0.84;
        }
    }
    public void solve(){//Решение
    initialize();
        for(int i = 0;i<=6;i++){
            u[i][0] =(double)Math.round(u[i][0] * 10000d) / 10000d;
            u[0][i] =(double)Math.round(u[0][i] * 10000d) / 10000d;
            t[i] = (double)Math.round(t[i] * 10000d) / 10000d;
        }
    for(int j = 0;j<6;j++){
        for(int i = 1;i<6;i++){
            u[i][j+1] = (u[i+1][j]+4*u[i][j]+u[i-1][j])/6;
```

```
            double otvet = u[i][j+1];
            u[i][j+1] = (double)Math.round(otvet * 10000d) / 10000d;
        }
    }
        String s1 = "j";
        String s2 = "i";
        String s3 = "0";
        String s4 = "1";
        String s5 = "2";
        String s6 = "3";
        String s7 = "4";
        String s8 = "5";
        String s9 = "6";
        System.out.format("%6s | %6s | %6s | %6s | %6s | %6s | %6s | %6s |
%6s |",s1,s2,s3,s4,s5,s6,s7,s8,s9);
        System.out.println();
        System.out.println("------------------------------------------------------------------
-----------");
        System.out.format("%6s | "," ");
        System.out.format("%6s | ","t \\ x");
        for(int b =0;b<x.length;b++){
        System.out.format("%6s | ",x[b]);
    }
        System.out.println();

    for(int i=0;i<x.length;i++){
        System.out.format("%6s | ",i);
        System.out.format("%6s | ",t[i]);
        for(int j = 0;j<t.length;j++){
```

```
            System.out.format("%6s | ",u[j][i]);
        }
        System.out.println();
    }
    }
    public static void main(String[] args) {
        Calculator calculator = new Calculator(); //Объект класса
калькулятор
        calculator.solve(); //Вызов метода решения
    }
```

3. Результат программы:

```
 j |     i |     0 |     1 |     2 |     3 |     4 |     5 |     6 |
-----------------------------------------------------------------------------
  | t \ x | 0.0 |    0.1 |    0.2 |    0.3 |    0.4 |    0.5 |    0.6 |
0 |    0.0 |   0.12 |   0.39 |    0.6 |   0.75 |   0.84 |   0.87 |   0.84 |
1 | 0.0017 | 0.1234 |   0.38 |   0.59 |   0.74 |   0.83 |   0.86 |   0.84 |
2 | 0.0034 | 0.1268 | 0.3722 |   0.58 |   0.73 |   0.82 | 0.8517 | 0.84 |
3 | 0.0051 | 0.1302 | 0.3659 | 0.5704 |   0.72 | 0.8103 | 0.8445 | 0.84 |
4 | 0.0068 | 0.1336 | 0.3607 | 0.5612 | 0.7101 | 0.8009 | 0.8381 | 0.84 |
```

По данным проанализированным аналитическим решением уравнении теплопроводности, можно сделать вывод, что решение удается получить только для простейших условий, для тел простой формы, при этом отмечается высокая вычислительная сложность. При помощи численного метода всегда возможно удовлетворить граничным условиям задачи,

и решать сложные задачи, недоступные для аналитических методов. Вычислительная сложность задачи значительно меньше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. - М.: Наука, 1960, - 524 с.;
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.:Наука, 1983 – 726 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, Физматлит, Москва, 1966. – 735 с.;
4. Кудинов В. А., Кудинов И. В. Методы решения уравнений теплопроводности. Самара, 2012. 280 с.