УДК: 51-7+004.021 (045)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЙ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Аширбаев Б. Ы., Алымбаева Ж.А., Жармат к. Б.
Кыргызско-Российский Славянский университет имени Б. Н. Ельцина
Кыргызский Государственный Технический Университет им. И.Раззакова

Оптимизационные задачи встречаются почти во всех отраслях науки и техники. В современной теории управления широко используются оптимизационные методы, которые составляют основу математического программирования. В статье рассмотрен метод динамического программирования решения одной из экономических задач, а именно – задачи о распределении инвестиций, решающей проблему нахождения оптимальных экономических стратегий и получения при этом максимальной выгоды от предприятий.

Ключевые слова: распределение инвестиций, динамическое программирование, функциональные уравнения, условная оптимизация, безусловная оптимизация.

ИНВЕСТИЦИЯЛАРДЫ ОПТИМАЛДЫК БӨЛҮШҮҮ МАСЕЛЕСИН ДИНАМИКАЛЫК ПРОГРАММАЛОО МЕТОДУ МЕНЕН ЧЕЧҮҮ

Аширбаев Б. Ы., Алымбаева Ж.А., Жармат к. Б.
Б.Н. Ельцин атындагы Кыргыз-Россия Славян университети
Исхак Раззаков атындагы Кыргыз мамлекеттик техникалык университети

Оптималдаштыруу көйгөйлөрү илим менен техниканын дээрлик бардык тармактарында кездешет. Заманбап башкаруу теориясында математикалык программалоонун негизин түзгөн оптималдаштыруу ыкмалары кеңири колдонулат. Макалада экономикалык маселелердин бирин чечүү үчүн динамикалык программалоо ыкмасы каралат, атап айтканда, оптималдуу экономикалык стратегияларды табуу жана ишканалардан максималдуу пайда алуу маселесин чечүүчү инвестицияларды бөлүштүрүү маселеси.

Баштапкы сөздөр: инвестицияларды бөлүштүрүү, динамикалык программалоо, функционалдык теңдеме, шарттуу оптималдаштыруу, шартсыз оптималдаштыруу.

SOLUTION OF THE PROBLEM OF OPTIMAL DISTRIBUTION OF INVESTMENTS BY THE DYNAMIC PROGRAMMING METHOD

Ashirbaev B. Y., Alymbaeva Zh.A., Zharmat K. B.
Kyrgyz-Russian Slavic University named after B. N. Yeltsin
Kyrgyz State Technical University named after I.Razzakov

Optimization problems encountered in almost all branches of science and technology. In modern control theory, optimization methods are widely used, which form the basis of mathematical programming. The article considers a method of dynamic programming for solving one of the economic problems, namely, the problem of the distribution of investments, which solves the problem of finding optimal economic strategies and obtaining the maximum benefit from enterprises.

Keywords: distribution of investments, dynamic programming, functional equations, conditional optimization, unconditional optimization.

Введение. Для решения многих задач оптимизации, включающих большое число переменных и ограничений в виде неравенства, классический аппарат математики оказался непригодным. В результате пришла идея разбивать задачу большой размерности на подзадачи, включающих всего по несколько переменных, и последующего решения общей задачи по частям. Именно эта идея стала основой при создании метода динамического программирования.

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности, впервые сформулированный в 1953 г. американским математиком Р. Э. Беллманом: каково бы ни было состояние системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая выигрыш на данном шаге. При решении задачи на каждом шаге выбирается управление, которое должно привести к оптимальному выигрышу. Если считать все шаги независимыми, тогда оптимальным управлением будет то управление, которое обеспечит максимальный выигрыш именно на данном шаге [1].

Постановка задачи. Инвестор выделяет средства в размере D условных единиц, которые должны быть распределены между n-предприятиями. Каждое i-тое предприятие при инвестировании в него средств x_i приносит прибыль $f_i(x_i)$ условных единиц, i=1...n. Нужно выбрать оптимальное распределение инвестиций между предприятиями, обеспечивающее максимальную прибыль.

Решение задачи. Обозначим x_i капиталовложение в i-тое предприятие, тогда целевая функция (ЦФ) примет вид представленный в формуле (1).

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to max \qquad (1)$$

Ограничение объёма средств (D, денежных единиц) равняется сумме объёмов средств на каждом из предприятий, а объем средств на каждом предприятии должен быть больше или равен нулю (2).

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = D \\ x_i \geq 0 \quad (\forall i \in n) \end{cases} \qquad (2)$$

В методе динамического программирования, на первом этапе решения задачи, называемом *условной оптимизацией*, определяются функция Беллмана и оптимальные управления для всех возможных состояний на каждом шаге, начиная с последнего в соответствии с алгоритмом обратной прогонки. На последнем, n-м шаге, оптимальное управление определяется функцией Беллмана, а дальнейшие вычисления производятся согласно рекуррентному соотношению, связывающему функцию Беллмана на каждом шаге с этой же функцией, но вычисленной на предыдущем шаге.

$$\begin{cases} F(S) = max\{W_k(S, x_k)\} & x_k \in X \\ F_k(S) = max\{W_k(S, x_k) + F_{k+1}(S_1(S, x_k))\} & x_k \in X \end{cases} \qquad (3)$$

Безусловная оптимизация. После того, как функция Беллмана и соответствующие оптимальные управления найдены для всех шагов с n-го по первый, осуществляется второй этап решения задачи, называемый безусловной оптимизацией. Пользуясь тем, что на первом шаге состояние системы известно – это ее начальное состояние S_0, можно найти оптимальный результат за все n шагов и оптимальное управление на первом шаге x_1, которое этот результат доставляет. После применения этого управления система перейдет в другое состояние $S_1(S, x_1^*)$, зная которое, можно, пользуясь результатами условной оптимизации, найти оптимальное управление на втором шаге x_1^*, и так далее до последнего n-го шага [2, 3].

Пример. На развитие трех предприятий выделено 5 у.д.е (условных денежных единиц). Известна эффективность капитальных вложений в каждое предприятие, заданная значением нелинейной функции $f_i(x_i), i = 1,2,3$ представленной в табл. 1. Необходимо распределить выделенные средства между предприятиями таким образом, чтобы получить максимальный суммарный доход.

Таблица 1.

Объем инвестиций	**Ожидаемая прибыль предприятия**		
x_i	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0
1	2	1	3
2	4	2	6
3	6	6	8
4	8	10	9
5	10	12	10

Условная оптимизация. На основании метода динамического программирования [2, 3] для решения задачи строится динамические таблицы. Количество этих таблиц будет на единицу меньше чем число предприятий.

Сначала определим оптимальную стратегию распределения денежных средств между первым и вторым предприятием. Для этого построим промежуточную динамическую таблицу (таблица 2) выполняя следующие действия:

1. Значения x_1 и x_2 заносим в первую строку и в первый столбец таблицы (они могут принимать целочисленные значения от 0 до 5 включительно).
2. Во второй столбец и во вторую строку заносим заданные значения прибыли $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ соответственно.
3. В последующих строках таблицы записываются суммы $f_1(x_1) + f_2(x_2)$ т.е. общая прибыль для различного распределения между первым и вторым предприятием, с учетом того, что сумма инвестируемых средств должна быть строго равна 5 у. д. е.
4. Выберем максимальный прибыль для определенной суммы инвестирования (из каждого диагонального блока) и заносим их в последний столбец таблицы. На основе всего этого получим таблицу 2.

Таблица 2.

	x_2	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
x_1	$f(x_2)$ / $f(x_1)$	0	1	2	6	10	12	$max\{f(x_1), f(x_2)\}$
0	0	0	1	2	6	10	12	**0**
1	2	2	3	4	8	12	-	$\max\{2,1\} = \mathbf{2}$
2	4	4	5	6	10	-	-	$\max\{4,3,2\} = \mathbf{4}$
3	6	6	7	8	-	-	-	$\max\{6,5,4,6\} = \mathbf{6}$
4	8	8	9	-	-	-	-	$\max\{8,7,6,8,10\} = \mathbf{10}$
5	10	10	-	-	-	-	-	$\max\{10,9,8,10,12,12\} = \mathbf{12}$

Теперь определим оптимальную стратегию распределении денежных средств между третьим и двумя другими предприятиями. Для этого построим итоговую динамическую таблицу (таблица 3) выполняя следующие действия:

1. Значения $x_1 + x_2$ и x_3 заносим в первую строку и в первый столбец таблицы (они могут принимать целочисленные значения от 0 до 5 включительно).
2. Во второй столбец заносим определенные значения максимальной прибыли из последнего столбца предыдущей таблицы, а во вторую строку заданные значения $f_3(x_3)$.
3. В последующих строках таблицы записываются суммы $f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$ т.е. общая прибыль для различного распределения между третьим и двумя другими предприятиями, с учетом того, что сумма инвестируемых средств должна быть строго равна 5 у. д. е.
4. Выберем максимальный прибыль для определенной суммы инвестирования (из каждого диагонального блока) и заносим их в последний столбец таблицы. На основе всего этого получим таблицу 3.

Таблица 3.

	x_3	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	
$x_1 + x_2$	$f(x_3)$ / $f(x_1) + f(x_2)$	0	3	6	8	9	10	$max\{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\}$
0	0	0	3	6	8	9	10	**0**
1	2	2	5	8	8	11	-	$\max\{2,3\} = \mathbf{3}$
2	4	4	7	10	12	-	-	$\max\{4,5,6\} = \mathbf{6}$
3	6	6	9	12	-	-	-	$\max\{6,7,8,8\} = \mathbf{8}$
4	10	10	13	-	-	-	-	$\max\{10,9,10,8,9\} = \mathbf{10}$
5	12	12	-	-	-	-	-	$\max\{12,13,12,12,11,10\} = \mathbf{13}$

На этом этап условной оптимизации завершен. Приступаем к безусловной оптимизации.

Безусловная оптимизация. Из таблицы 3 получаем, что максимальный инвестиционной доход 13 у. д. е. получается при $\boldsymbol{x_1 + x_2 = 4}$ и $\boldsymbol{x_3 = 1}$. На основе таблицы 2 определяем величину оставшихся денежных средств, приходящуюся на долю первого и второго предприятия. На этом этапе максимальный инвестиционной доход 12 у. д. е. получается при $\boldsymbol{x_1 = 0}$ и $\boldsymbol{x_2 = 4}$. Таким образом, оптимальное решение задачи построено, этап безусловной оптимизации метода динамического программирования завершен. Для достижения максимальной суммарной ожидаемой прибыли по всему производственному объединению равной 13 у. д. е. следует не выделять средств первому предприятию, второму предприятию следует выделить 4 у. д. е, а третьему предприятию — 1 у. д. е.

Заключение. Инвестиционная деятельность, в той или иной степени, присуща любому предприятию, поскольку она представляет собой один из наиболее важных аспектов его функционирования: как инвестиционные решения часто неразрывно связаны с остальными видами деятельности компаний. При решении данных задач целесообразно использовать модели динамического программирования, которые позволяют оптимизировать стандартный подход использованием информационных технологий. Основное достоинство принципа оптимальности в том, что он позволяет свести задачу с большим числом измерений к более простому виду и решать конкретную задачу не изолированно, а во взаимосвязи со множеством подобных задач. Данная оценка эффективности инвестиционных проектов носит рекомендательную характеристику и служит инструментом поддержки принятия управленческого решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллан; под редакцией Н.Н. Воробьева - Москва: Издательство иностранной литературы, 1960. - 549 с.
2. Лежнев А. В. Динамическое программирование в экономических задачах: учебное пособие / А. В. Лежнев. — 3-е изд. (эл.). — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. -179 с.
3. Окулов, С.М. Динамическое программирование / С.М. Окулов. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2018. - 136 с.