УДК 519. 633

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Осмонканов А.М., Асанкожоева Н.Т.
КГТУ им. И.Раззакова

В данной статье приведены основные теоретические сведения, необходимые для математического моделирования процессов теплопроводности. Подробно разобран метод конечных разностей, как метод, необходимый для решения дифференциального уравнения в частных производных.

Ключевые слова: метод конечных разностей, температура в теле, во внутренних точках сетки, разность уравнения.

ЖЫЛУУЛУКТУ ӨТКӨРҮҮЧҮЛҮКТҮН ТЕҢЛЕМЕСИН ЧЕЧҮҮНҮН АЙЫРМА СХЕМАСЫ

Осмонканов А.М., Асанкожоева Н.Т.
КМТУ им. И.Раззакова

Бул макалада жылуулук өткөрүмдүүлүк теңдемесинин сандык чечимдери келтирилген. Акыркы айырмачылыктар ыкмасы менен чечүү майда-чүйдөсүнө чейин талкууланат.

Баштапкы сөздөр: чектүү айырма ыкмасы, нерсенин температурасы, тордун ички чекиттеринде, теңдеменин айырмасы.

DIFFERENCE SCHEME FOR SOLVING THE HEAT CONDUCTIVITY EQUATION

Osmonkanov A.M., Asankozhoeva N.T.
KSTU im. I. Razzakova

This article presents a numerical solution of the thermal conductivity equation. The solution by the finite difference method is considered in detail.

Key words: the finite difference method, the temperature in the body, at the inner points of the grid, the difference of the equation.

Для решения задач теплопроводности в твердых телах сложной формы используются аналитические и численные методы. Решения возможны при известных краевых условиях, включающих начальное распределение температур в теле и граничные условия на поверхности тела, которые могут быть заданы одним из трех способов: температурой поверхности, тепловым потоком и коэффициентом теплоотдачи [1.2.].

Из численных методов решения задач теплопроводности в настоящее время наиболее ценным и широко используемым является метод конечных разностей.

Рассмотрим численное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

где u- температура, x- пространственная координата, t- время и λ - коэффициент температуропроводности.

для значений аргументов $x \in [0; 1.6]$, $t \in [0, 1]$ при заданных начальном $u(x,t)|_{t=0} = \sin(0.55x + 0,03)$ (1.2) и граничных $u(0,t) = 2 * t + 0.03$ и $u(1.6,t) = 0.7895$ (1.3)условиях . Принять $\lambda = 1$, шаг изменения пространственной координаты равным 0.2, временной – 0.2.

Получить максимальное и минимальное значения температуры в рассмотренной области, построить графики изменения температуры в точки области x=1.2 и при значении времени t=0,6.

При решении дифференциального уравнения в частных производных наиболее часто используется метод конечных разностей (МКР)[1]. Идея МКР решения краевых задач весьма проста и видна уже из самого названия: вместо производных в дифференциальном уравнении используются их конечноразностные аппроксимации. При построении дискретных аппроксимаций краевых дифференциальных задач нужно стремиться увязать две, возможно, противоречивые цели: хорошее качество аппроксимации и эффективное устойчивое решение получающихся при этом алгебраических систем.

При использовании МКР для задач теплопроводности твердое тело представляют в виде совокупности узлов. Аппроксимируя (заменяя) частные производные дифференциального уравнения (1.1.) конечными разностями получают систему линейных алгебраических уравнений для определения температуры, как локальной характеристики в каждом узле сетки. Полученная система является незамкнутой, для ее замыкания используют разностное представление граничных условий. В результате получают замкнутую систему линейных алгебраических уравнений, которую решают численными методами с помощью компьютера.

Заменяя производные, входящие в уравнение. (1.1), разностным отношением, получим конечно- разностные уравнения:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{\Delta_t u(x,t)}{\Delta t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta_x^2 u(x,t)}{(\Delta x)^2} \qquad (1.4)\ ,$$

где приращение аргументов по времени и по пространственной координате принимаются постоянными, равными $\Delta t = t_{j+1} - t_j = \tau = 0.2$ и

$$\Delta x = x_{j+1} - x_j = h = 0.2$$

соотношения (1.4) в дифференциальное уравнение с частными производными (1.1), получаем разность уравнения для искомого решения $u(x_{i,} t_j)$ на сетке значений аргумента по пространственной 0.4 и временной -0.2 переменным:

$$\frac{\Delta_t u(x_i, t_j)}{\tau} = \lambda \frac{\Delta_x{}^2 u(x_i, t_j)}{h^2} \qquad (1.5)$$

Разность первого порядка по времени заменяется разностями

$$\Delta_t u(x_i, t_j) = u(x_i, t_j) - u(x_i, t_j - \tau) \qquad (1.6)$$

Разность второго порядка по пространственной координате заменяется разностями

$$\Delta_x^2 u(x_i, t_j) = u(x_i - h, t_j) - 2 \cdot u(x_i, t_j) + u(x_i + h, t_j). \qquad (1.7)$$

Аналогичные разностные соотношения делений применились при решении краевой задачи обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Поставив соотношение (1.6) и (1.7) в уравнения (1.5) , приходим к системе алгебраических уравнений относительно значений температуры в узлах $u(x_i, t_j)$:

$$\frac{u(x_i,t_j)-u(x_i,t_{j-1})}{\tau} = \lambda \cdot \frac{u(x_{i-1},t_j)-2\cdot u(x_i,t_j)+u(x_{i+1},t_j)}{h^2} \quad (1.8)$$

Уравнения (1.8) позволяют вычислить решение во внутренних точках сетки области определения решения. Число уравнений системы (1.8) меньше числа неизвестных. Недостающие уравнения находятся из начального (1.2) и граничных (1.3) условий.

Начальное условие (2) при t=0 в точках xi имеют вид:

$$u(x_i,0) = \sin(0.55x + 0{,}03) \quad (1.9)$$

Для изменения на концах изменения пространственной переменной (1.3) имеем:

$$u(0,t_j) = 2t_j + 0{,}03\ ;\ u(1.6,t_j) = 0.7895 \quad (1.10)$$

Если у нас шаг по пространственной координате равным 0.2, шаг по временной координате – 0.2. Значит, координаты x, в которых определяется решение, равняются x=0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1; 1.2; 1.4; 1.6.

Временная координата t принимает значения t=0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.

$$\sigma\cdot u(x_{i-1},t_j) - \alpha\cdot u(x_i,t_j) + \sigma\cdot u(x_{i+1},t_j) = -u(x_i,t_{j-1}). \quad (1.11)$$

Здесь введены обозначения

$$\sigma = \frac{\lambda\cdot\tau}{h^2},\quad \alpha = 1 + 2\cdot\sigma. \quad (1.12)$$

рассчитаем наши $\sigma;\alpha$

$$\sigma = \frac{1\cdot(0{,}2)}{(0{,}2)^2} = 5 \text{ и } \alpha = 1+2\cdot 5 = 11$$

граничные условия имеют вид:

из (1.2) и (1.3) :

$$
\begin{aligned}
&u(0;\,0) = 2\cdot 0 + 0{,}03 = 0{,}03\\
&u(0;\,0.2) = 2\cdot 0.2 + 0{,}03 = 0.43\\
&u(0;\,0.4) = 2\cdot 0.4 + 0{,}03 = 0.83\\
&u(0;\,0.6) = 2\cdot 0.6 + 0{,}03 = 1.23\\
&u(0;\,0.8) = 2\cdot 0.8 + 0{,}03 = 1.63\\
&u(0;\,1) = 2\cdot 1 + 0{,}03 = 2.03
\end{aligned}
\qquad (1.13)
$$

$$
\begin{aligned}
&u(1.6;\,0) = 0.7895\\
&u(1.6;\,0.2) = 0.7895\\
&u(1.6;\,0.4) = 0.7895\\
&u(1.6;\,0.6) = 0.7895\\
&u(1.6;\,0.8) = 0.7895\\
&u(1.6;\,1) = 0.7895
\end{aligned}
\qquad (1.14)
$$

На каждом временном слое необходимо решить систему (1.11) из четырнадцати уравнений. Перепишем систему (1.13) в развернутом виде:

$$
\begin{cases}
5\cdot u(0;\,0.2) - 11\cdot u(0.2;\,0.2) + 5\cdot u(0.4;\,0.2) = -u(0.2;\,0)\\
5\cdot u(0.2;\,0.2) - 11\cdot u(0.4;\,0.2) + 5\cdot u(0.6;\,0.2) = -u(0.4;\,0)\\
5\cdot u(0.4;\,0.2) - 11\cdot u(0.6;\,0.2) + 5\cdot u(0.8;\,0.2) = -u(0.6;\,0)\\
5\cdot u(0.6;\,0.2) - 11\cdot u(0.8;\,0.2) + 5\cdot u(1;\,0.2) = -u(0.8;\,0)\\
5\cdot u(0.8;\,0.2) - 11\cdot u(1;\,0.2) + 5\cdot u(1.2;\,0.2) = -u(1;\,0)\\
5\cdot u(1;\,0.2) - 11\cdot u(1.2;\,0.2) + 5\cdot u(1.4;\,0.2) = -u(1.2;\,0)\\
5\cdot u(1.2;\,0.2) - 11\cdot u(1.4;\,0.2) + 5\cdot u(1.6;\,0.2) = -u(1.4;\,0)\\
\end{cases}
\qquad (1.15)
$$

$$
\begin{cases}
-11\cdot u(0.2;\,0.2) + 5\cdot u(0.4;\,0.2) = -u(0.2;\,0) - 5\cdot u(0;0.2)\\
5\cdot u(0.2;\,0.2) - 11\cdot u(0.4;\,0.2) + 5\cdot u(0.6;\,0.2) = -u(0.4;\,0)\\
5\cdot u(0.4;\,0.2) - 11\cdot u(0.6;\,0.2) + 5\cdot u(0.8;\,0.2) = -u(0.6;\,0)\\
5\cdot u(0.6;\,0.2) - 11\cdot u(0.8;\,0.2) + 5\cdot u(1;\,0.2) = -u(0.8;\,0)\\
5\cdot u(0.8;\,0.2) - 11\cdot u(1;\,0.2) + 5\cdot u(1.2;\,0.2) = -u(1;\,0)\\
5\cdot u(1;\,0.2) - 11\cdot u(1.2;\,0.2) + 5\cdot u(1.4;\,0.2) = -u(1.2;\,0)\\
5\cdot u(1.2;\,0.2) - 11\cdot u(1.4;\,0.2) = -u(1.4;\,0) - 5\cdot u(1.6;\,0.2)
\end{cases}
\qquad (1.16)
$$

$$\begin{cases} u_1 - 0{,}454u_2 = 0{,}1046 \\ 5u_1 - 11u_2 + 5u_3 = -0{,}004 \\ 5u_2 - 11u_3 + 5u_4 = -0{,}006 \\ 5u_3 - 11u_4 + 5u_5 = -0{,}008 \\ 5u_4 - 11u_5 + 5u_6 = -0{,}010 \\ 5u_5 - 11u_6 + 5u_7 = -0{,}012 \\ 5u_6 - 11u_7 = -3{,}9605 \end{cases} \qquad (1.17)$$

Проанализировав аналитическое решение уравнения теплопроводности, можно сделать вывод, что решение удается получить только для простейших условий, для тел простой формы, при этом отмечается высокая вычислительная сложность. При помощи численного метода всегда возможно удовлетворить граничным условиям задачи и решать сложные задачи, недоступные для аналитических методов. Вычислительная сложность задачи значительно меньше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быкова О.Г. Информатика. Математические методы в процессах добычи нефти и газа: методические указания по выполнению курсовой работы. Спб,2010. 39 с.
2. Кудинов В. А., Кудинов И. В. Методы решения уравнений теплопроводности. Самара, 2012. 280 с.
3. Карпович Д. С. Моделирование и численное решение уравнения теплопроводности \\Энерго и ресурсосберегающие технологии и оборудование, экологически безопасные технологии. Минск, 2014., 311с.