УДК 532

ТЕЧЕНИЕ В СУЖИВАЮЩЕМСЯ КАНАЛЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Чечейбаев Б.
КНУ им. Ж. Баласагына

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка относительно функции тока описывающего пограничного слоя установившегося плоскопараллельного течения несжимаемой жидкости. Найдено точное аналитическое решение, описывающее плоскопараллельного течения несжимаемой жидкости в суживающемся канале. Определены выражения для функции тока, продольной u и поперечной v составляющей скорости и уравнение линии тока. Найдены автомодельные решения уравнения стационарного ламинарного гидродинамического пограничного слоя на плоской пластине. В этом случае решение выражается через (тангенс) тригонометрические функции, установлены функции, определяющие распределение поля скоростей. Решение уравнения, соответствующие более общему случаю интегрирования выражается через цилиндрические и бесселевы функции первого и второго рода.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение пограничного слоя написанное относительно функции тока; гиперболические и обратные гиперболические функции; функции тока, несжимаемая жидкость.

ИЧКЕРҮҮЧҮКАНАЛДАГЫКЫСЫЛБООЧУСУЮКТУКТУН АГЫМЫ

Чечейбаев Б.
Ж. Баласагын атындагы КУУ

Кысылбоочу суюктуктардын калыптанган жалпак параллелдүү агымдарынын чектик катмары үчүн ток функциясына карата туюндурулган сызыктуу эмес, үчүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемеси каралды. Ичкерүүчү каналдагы кысылбоочу суюктуктун жалпак параллелдүү агымдарын сүрөттөөчү так аналитикалык чыгарылышы табылды. Ток функциясы, ылдамдыктын түзүүчүлөрү туюндурулду, ток сызыктарынын теңдемеси аныкталды. Жалпак пластинадагы ламинардык стационардуу гидродинамикалык чектик катмардын теңдемесинин автомоделдүү чыгарылышы тургузулду. Бул учурдагы чыгарылыш тригонометриялык тангенс функциясы аркылуу туюндурулуп ток функциясы, ылдамдык талаасынын таралышын билдирүүчү функциялар такталды. Теңдемени интегралдоонун жалпы учуруна туура келүүчү чыгарылыш цилиндрдик, биринчи жана экинчи түрдөгү бесселдин функцияларынан турат. Чектик катмардын ток функциясына карата жазылган теңдемеси; гиперболалык жана тескери гиперболалык тангенс функциясы, ток функциясы; кысылбоочу суюктук.

Баштапкы сөздөр: ток функциясына карата жазылган чектик катмарынын дифференциалдык теңдемеси; гиперболалык жана тескери гиперболалык функциялар; ток функциясы; кысылбоочу суюктук.

FLOW IN A NARROWING CHANNEL OF AN INCOMPRESSIBLE FLUID

Checheibaev B.
KNU named after J. Balasagyn

A nonlinear partial differential equation of the third order with respect to the current function describing the boundary layer of a steady plane-parallel incompressible fluid flow is considered. An exact analytical solution describing the plane-parallel flow of an incompressible fluid in a narrowing channel has been found. Expressions for the current function, the longitudinal u and transverse v component of the velocity and the equation of the current line are determined. Self-similar solutions of the equation of a stationary laminar hydrodynamic boundary layer on a flat plate are found. In this case, the solution is expressed in terms of (tangent) trigonometric functions, the functions determining the distribution of the velocity field are established. The solution of the equation corresponding to the more general case of integration is expressed in terms of cylindrical and Bessel functions of the first and second kind.

Key words: The differential equation of the boundary layer written with respect to the current function; hyperbolic and inverse hyperbolic functions; current functions, incompressible fluid.

Дифференциальное уравнение для пограничного слоя установившегося плоскопараллельного течения несжимаемой жидкости написанное относительно функции тока $\psi(x,y)$имеетследующийвид [1,c291]

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=U\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}, \qquad (1)$$

причём граничными условиями будут условия прилипания (на стенке)

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \text{ при} y = 0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = U(x) \text{при } y = \infty, \tag{1a}$$

здесь ν- вязкость несжимаемой жидкости.

«Подобные» решения существуют в этом случае, когда скорость потенциального течения пропорциональна степени расстояния x, измеряемого от передней критической точки, т.е. если$U(x) = u_1 x^m$.

Потенциальное течение скорость которого определяется в виде

$$U(x) = \frac{u_1}{-x}, \tag{2}$$

также будут иметь «подобное» решение, как и в течении около клина.

Здесь для случая $u_1 > 0$может быть существование плоскопараллельного течения в суживающемся канале с плоскими стенками. Количество жидкости, протекающей при полном угле раствора 2π и при высоте слоя равном единице равноQ= $2\pi u_1$.

Введем преобразование подобия

$$\eta = y\sqrt{\frac{U}{-x\nu}} = \frac{y}{x}\sqrt{\frac{u_1}{\nu}} = \frac{y}{x}\sqrt{\frac{Q}{2\pi\nu}}, \tag{3}$$

и функция тока$\psi(x, y)$ представляется в следующем виде

$$\psi(x, y) = -\sqrt{\nu u_1} f(\eta). \tag{4}$$

Подставляя соответствующие частные производные от (4) в рассматриваемое уравнение (1) и после сокращения на величину $-u_1^2/x^3$, получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка относительно функции $f(\eta)$:

$$f'''(\eta) - f'^2(\eta) + 1 = 0. \tag{5}$$

Граничные условия вытекают из условий (1а) и будут:

$$f = 0,\ f' = 0 \text{ при} \eta = 0;$$
$$f' = 1 \text{ при } \eta = \infty.$$

Для интегрирования выведенного дифференциального уравнения (5) умножим обе части уравнения на $2f''(\eta)$ и получим

$$2f''(\eta)f'''(\eta) - 2{f'}^2(\eta)f''(\eta) + 2f''(\eta) = 0,$$

которое является уравнением в полных дифференциалах так как,

$$2\left({f'}^2 f'' + f''\right) = \left\{-\frac{2}{3}(f'-1)^2(f'+2)\right\}' \text{ и}$$

$$2f''(\eta)f'''(\eta) = ({f''}^2(\eta))'.$$

После однократного интегрирования имеем:

$${f''}^2(\eta) - \frac{2}{3}(f'(\eta)-1)^2(f'(\eta)+2) = C, \tag{6}$$

где C есть постоянная интегрирования.

Так как при$\eta \to \infty$производные $f' = 1, f'' = 0$, то$C = 0$, и поэтому

$$\frac{\partial f'}{\partial \eta} = \sqrt{\frac{2}{3}(f'-1)^2(f'+2)}.$$

Проинтегрировав это уравнение, мы найдём

$$\eta = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_0^{f'} \frac{df'}{\sqrt{(f'-1)^2(f'+2)}}, \tag{7}$$

здесь также аддитивная постоянная интегрирования равна нулю, так как согласно граничным условиям $f' = 1$ при $\eta = \infty$.

Полученного интеграла можно вычислить в замкнутой форме. Перепишем найденное выражение (7) в нижеследующем виде

$$\eta = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_0^{f'} \frac{df'}{(f'-1)\sqrt{(f'+2)}}. \tag{8}$$

Введем новую переменную интегрирования t пологая, что

$$f' + 2 = t^2. \tag{9}$$

Тогда получается следующий интеграл

$$\eta = \sqrt{6}\int_{\sqrt{2}}^{t}\frac{dt}{(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})}. \qquad (10)$$

Результатом интегрирования является следующая функция

$$\eta = \sqrt{2}\left\{Arth\sqrt{\frac{2+f'}{3}} - Arth\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}. \qquad (11)$$

Отсюда также после простого преобразования полученного выражения (11) для производной функции $f(\eta)$имеем следующее выражение

$$f'(\eta) = 3th^2\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} + 1{,}146\right), \qquad (12)$$

здесь $Arth\sqrt{\frac{2}{3}} = 1{,}146.$

Результат интегрирования представляет собой решение обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка искомой функции$f(\eta)$ и представляется в нижеследующем виде:

$$f(\eta) = -3\sqrt{2}th\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} + 1{,}146\right) + \eta + 4{,}862. \qquad (13)$$

Осуществляя обратный переход к прежним переменным x и y согласно преобразованию (3) и учитывая (4) определим функцию тока$\psi(x,y)$ являющейся точным решением уравнения пограничного слоя течения несжимаемой жидкости (1):[2, с 205]

$$\psi(x,y) = -\sqrt{\nu u_1}\left\{-3\sqrt{2}th\left(\frac{y}{\sqrt{2}x}\sqrt{\frac{u_1}{\nu}} + 1{,}146\right) + \frac{y}{x}\sqrt{\frac{u_1}{\nu}} + 4{,}862\right\}. \qquad (14)$$

Продольная uи поперечнаяv составляющие вектора скорости течения жидкости, определяются через функцию тока $\psi(x,y)$следующим образом:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (15)$$

Находя соответствующие частные производные от функции тока $\psi(x,y)$получаются выражения для определения величин u и v

$$u = -u_1 \frac{1}{x}\left(3th^2\left(\frac{y}{\sqrt{2}x}\sqrt{\frac{u_1}{\nu}} + 1{,}146\right) - 2\right),$$
$$v = -u_1 \frac{y}{x^2}\left(3th^2\left(\frac{y}{\sqrt{2}x}\sqrt{\frac{u_1}{\nu}} + 1{,}146\right) - 2\right); \qquad (16)$$

Известно, что при плоскопараллельных установившихся течениях вязкой жидкости линии тока совпадают с линиями тока потенциального течения. Уравнение линии тока в течении жидкости определяется из соотношения $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$.

После подстановки выражений для u и v из (16) в это соотношение и проинтегрировав имеем уравнение линии тока в такой форме

$$y = \frac{C}{x}, \qquad (17)$$

где C $-$ постоянная интегрирования.

На рисунке 1 видно, что линии представляют собой стенки сужающегося канала

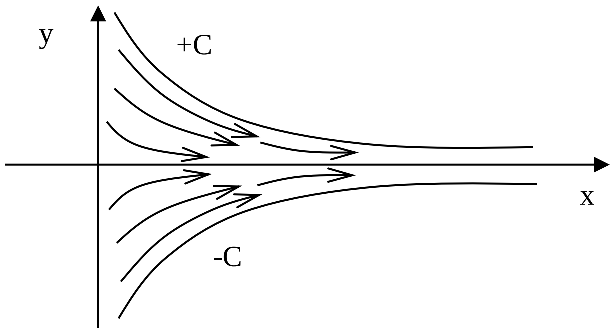

Рис.1. Течение в сужающемся канале

В суживающемся канале прилегающий к стенкам слой жидкости в котором проявляются действие трения, получается весьма тонкий слой, что его толщина пропорциональна $\sqrt{\nu}$.

Если ввести полярный угол $\theta = y/x$и подставить $\theta = 2\pi r U$, гдеrесть радиальное расстояние от источника в преобразование(3), то мы получим:

$$\eta = \theta \sqrt{\frac{Ur}{\nu}}. \tag{18}$$

Примерно при $r = 3$пограничной слой смыкается, с потенциальным течением. Следовательно, толщина пограничного слоя равна

$$\delta = 3x\sqrt{\frac{\nu}{Ur}}. \tag{19}$$

Теперь рассмотрим уравнение гидродинамического пограничного слоя, имеющий следующий вид:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}. \tag{20}$$

Функция тока $\psi(x,y)$ищется следующим автомодельном виде

$$\psi(x,y) = x^{\lambda+1}F(z), \;\; z = x^{\lambda}y, \tag{21}$$

z- автомодельная переменная, λ- показатель автомодельности.

Подставляя предполагаемый вид решения (21) в уравнении (20) получаем относительно искомой функции$F(z)$ нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$(2\lambda+1)(F')^2 - (\lambda+1)F'F'' = \nu F'''. \tag{22}$$

Пусть показатель автомодельности λ принимает значение равное $\lambda = -2/3$.Тогда из уравнения (22) получается нижеследующее уравнение

$$-\frac{1}{3}F'^2 - \frac{1}{3}FF'' = \nu F''',$$

которое умножением на 3 приводится к следующему виду

$$3\nu F''' + FF'' + F'^2 = 0. \tag{23}$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т. е.

$$(3\nu F'' + FF')' = 0.$$

После двукратного интегрирования получается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, которое представляется в нижеследующем виде

$$6\nu F_z' + F^2 = C_1 z + C_2, \tag{24}$$

где C_1, C_2-постоянные интегрирования.

Рассмотрим частный случай интегрирования уравнения (24).

Пусть $C_1 = 0,\ C_2 = -\tilde{C}_2$, тогда рассматриваемое уравнение имеет вид

$$6\nu F'(z) = -(\tilde{C}_2 + F^2),$$

и является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Предположим, что $|\tilde{C}_2| = b^2$, тогда результатом интегрирования является следующая функция

$$F(z) = btg\left(-\frac{b}{6\nu}z + C_3\right). \tag{25}$$

здесь C_3- постоянная интегрирования.

Подставляя выражения для найденного решения, т.е. функции $F(z)$ в преобразование (21) определяется функция тока $\psi(x,y)$

$$\psi(x,y) = x^{1/3} btg\left(-\frac{b}{6\nu}x^{-\frac{2}{3}}y + C_3\right). \tag{26}$$

Принимая во внимание формулу (15) определяем составляющих вектора скорости u и v соответствующее этому виду течения несжимаемой жидкости и имеем следующие выражения:

$$\begin{gathered} u = -x^{-\frac{1}{3}}\frac{b^2}{6\nu}\frac{1}{\cos^2\left(-\frac{b}{6\nu}x^{-\frac{2}{3}}y + C_3\right)}, \\ v = -\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}btg\left(-\frac{b}{6\nu}x^{-\frac{2}{3}}y + C_3\right) - \frac{b^2}{9\nu}x^{-\frac{4}{3}}y\frac{1}{\cos^2\left(-\frac{b}{6\nu}x^{-\frac{2}{3}}y + C_3\right)}. \end{gathered} \tag{27}$$

Постоянную величину b в выражении для функции тока $\psi(x,y)$считаем равной $b = \sqrt{\frac{\nu I_0}{\rho}}$; Тогда

$$\psi(x,y) = -x^{-1/3}\sqrt{\frac{\nu I_0}{\rho}}tg\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\nu I_0}{\rho\nu}}x^{-2/3}y, \tag{28}$$

здесьρ- плотность жидкости,$I_0 - const.$ I_0 - служит такой же характерной величиной как интенсивность для точечного источника или стока.

По самому смыслу функции тока, следует что секундный объёмный расход определяется формулой

$$Q = 2(\psi)_{y=\infty}.$$

Нестационарное течение несжимаемой жидкости определяется формулой [2, 605]

$$\psi(t,x,y) = -x^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{\nu I_0}{\rho}}tg\left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\nu I_0}{\rho\nu}}x^{-\frac{2}{3}}(y+\varphi(x,t))\right), \qquad (29)$$

здесь $\varphi(x,t)$ - произвольная функция

Рассмотрим теперь общий случай интегрирования дифференциального уравнения (24) при $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$.

Преобразуем функцию $F(z)$в форме

$$F(z) = \frac{\alpha\tilde{u}'(z)}{\tilde{u}(z)}, \qquad (30)$$

где$\alpha - const$,$\tilde{u}(z)$ -новая искомая функция.

В результате применения преобразования (30) при значении $\alpha = 6\nu$относительно функции $\tilde{u}(z)$получается следующее линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\tilde{u}''(z) = (ax+b)\tilde{u}(z), \qquad (31)$$

где коэффициенты aи bопределяются следующим образом$a = \frac{C_1}{18\nu^2}, b = \frac{C_1}{18\nu^2}$.

Введем новую переменную$\xi = az + b$, тогда дифференциальное уравнение (31) принимает следующий вид:

$$\tilde{u}''(\xi) - \frac{1}{a^2}\xi\tilde{u}(\xi) = 0, \qquad (32)$$

где $a^2 = \frac{{C_1}^2}{324\nu^4}$.

Решение дифференциального уравнения (32) выражается через цилиндрические функции

$$\tilde{u}(\xi) = \sqrt{\xi} z_{1/3}\left(i\frac{12\nu^2}{C_1}\xi^{3/2}\right). \tag{33}$$

В соответствии с (32) искомая функция $u(z)$принимает следующий вид:

$$\tilde{u}(z) = \sqrt{az+b} z_{1/3}\left(i\frac{12\nu^2}{C_1}(az+b)^{3/2}\right). \tag{34}$$

Учитывая формулы преобразований (30), (21) определяем решение уравнения гидродинамического пограничного слоя течения несжимаемой жидкости (20)

$$\psi(x,y) = x^{1/3}\frac{1}{2\sqrt{2}\nu^2}\left(C_1 x^{-2/3} + C_2\right)^{1/2}\frac{z_{1/3}'\left(i\frac{\sqrt{2}}{9C_1\nu}\left(C_1 x^{-2/3}y + C_2\right)^{3/2}\right)}{z_{1/3}\left(i\frac{\sqrt{2}}{9C_1\nu}\left(C_1 x^{-2/3}y + C_2\right)^{3/2}\right)}, \tag{35}$$

следует отметить, что

$$z_{\frac{1}{3}}\left(i\frac{12\nu^2}{C_1}\xi^{3/2}\right),$$

является цилиндрической функцией и выражается через функции Бесселя следующим образом:

$$z_1(\xi) = C_1 J_{\frac{1}{3}}(\xi) + C_2 Y_{\frac{1}{3}}(\xi).$$

(C_1, C_2 произвольные постоянные)

Здесь $J_{\frac{1}{3}}(\xi)$ - бесселевы функции первого рода, а $Y_{\frac{1}{3}}(\xi)$ бесселевы функции второго рода.

Выводы:

1. Найдено точное решение дифференциального уравнения ламинарного установившегося плоскопараллельного

гидродинамического пограничного слоя течения несжимаемой жидкости в сужающемся канале.

Определены функция тока, распределение поля скорости.

2. Построено автомодельные решения уравнения стационарного гидродинамического пограничного слоя на плоской пластине выраженные через тригонометрические функции и бесселевы функции первого и второго рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полянин А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения /А.Д.Полянин, В.Ф.Зайцев. - М.: Физматлит, 2002. - 432 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя/ Шлихтинг Г. - М.: Наука, 1974. - 712 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа/ Лойцянский Л.Г. - М.: «Наука», 1960.