УДК 532(075.8)

СИММЕТРИЧНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ ЦЕЛИ МЕЖДУ ДВУМЯ СТЕНКАМИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ПРЕПЯТСТВИЕМ НА «ОСИ»

Абдылдаев[1] М.Ю., Дыйканова[2] А. Т., Токонбекова[1] К.Т., Мукамбетова[1] Н.Т., Мырзабекова[1] Ж.М.
[1]КГУ им. И. Арабаева, [2]КНАУ им. К.И.Скрябина

В этой статье рассматривается плоские задачи гидродинамики как симметричное истечение жидкости из цели между двумя плоскостями с криволинейным препятствием на оси. Исследованы новые схемы задачи об истечении струи из отверстия, когда тело частично загромождает выход из сосуда.

Ключевые слова: сжатия струи, обтекание, полуплоскость, интеграл, отверстия, гидродинамика.

«ОКТОГУ» ИЙРИ СЫЗЫКТУУ ТОСКООЛДУК МЕНЕН ЭКИ ТЕГИЗДИКТИН ОРТОСУНДАГЫ СУЮКТУКТУН СИММЕТРИЯЛУУ АГЫП ЧЫГЫШЫ

Абдылдаев[1] М.Ю., Дыйканова[2] А. Т., Токонбекова[1] К.Т., Мукамбетова[1] Н.Т., Мырзабекова[1] Ж.М.
[1]И.Арабаев атындагы КМУ, [2]К.И. Скрябин ат. КУАУ

Бул макалада суюктук динамикасынын тегиздик маселелери, октогу ийри сызыктуу тоскоолдук менен эки тегиздиктин ортосундагы суюктуктун симметриялуу агып чыгышы. Бул маселенин жаңы схемалары изилделип жатат ар кандай тоскоолдуктараркылуу идиштен агып чыгууга жарым-жартылай тоскоолдук болгондо, тешикчеден суюктуктун агып чыгуу маселеси каралган.

Баштапкы сөздөр: агымды кысуу, айланып агуу, жарым тегиздик, интегралдык, тешикчелер, гидродинамика.

SYMMETRICAL OUTFLOW FROM A TARGET BETWEEN TWO WALLS WITH A CURVILINEAR OBSTACLE ON THE "AXIS"

Abdyldaev[1] M.Yu., Dyikanova[2] A.T., Tokonbekova G.Ch., [1]Mukambetova N.T., [1]Myrzabekova J.M.
[1]KSU named of I. Arabaev, [2]University named after K.I.Scriabin

This article considers a plane problem of hydrodynamics - a symmetrical outflow of fluid from a target between two planes with a curvilinear obstacle on the axis. Using formulas, equations, solving problems at the end, we obtained a formula for the jet compression factor in the problem of "Symmetrical outflow from a target between two walls".
Key words: jet compression, flow around, half-plane, integral, holes, hydrodynamics.

Рассматриваются плоские задачи гидродинамики - симметричное истечение жидкости из цели между двумя плоскостями с криволинейным препятствием на оси (рис.1).

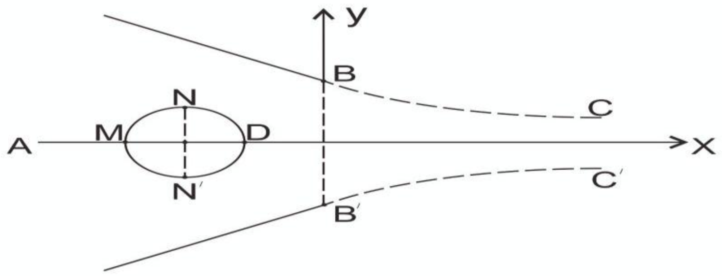

Рис.1. Картина течений в физической плоскости $Z = x + iy$.

Данная задача без препятствия внутри является исторически первой задачей гидродинамики, решенной с помощью теории струй созданной Гельмгольцем. В последствии Кирхгоф существенно развил и обобщил метод Гельмгольца. После работ Гельмгольца и Кирхгофа следующий крупный шаг был сделан русским ученым Н.Е. Жуковским.

М.Ю. Абдылдаевым исследованы новые схемы этой задачи – задача об истечении струи из отверстия, когда тело (различные виды препятствий) частично загромождает выход из сосуда $[2:3]$.

Перейдем к решению задачу схемы которой изображено на рис.1. методом Н.Е. Жуковского $[1]$:

$$\omega = ln\zeta = -ln\frac{dw}{v_0 dz} = ln\frac{v_0}{v} + i\theta, \qquad (1)$$

где θ – угол вектора скорости с осью абсцисс X.

Для решения задачи отобразим верхнюю половину области течения $Z(ImZ \geq 0)$ и соответствующие ей области изменения функций dw/$(v_0 dz)$

и w на верхнюю половину плоскости параметрического переменного t(Imt≥ 0) (рис. 2).

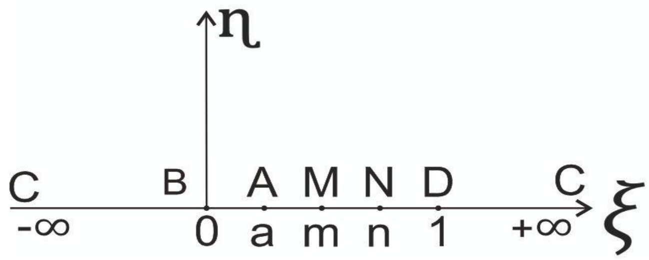

Рис.2. Параметрическая плоскость $t = \xi + i\eta$

На поверхностях струй BC и $\mathrm{B^I C^I}$абсолютная величина скорости постоянно и равно v_0.

Пусть на одной граничной линии точке ABC, функция тока $\psi = 0$ а на другой граничной линии тока AMNДС $\psi = -q$. Таким образом областью изменения w является полоса (рис.3) шириной q. Отображение этой полосы на верхнюю полуплоскость параметрического переменного t (Imt≥ 0) осуществляется с помощью формулы Кристоффеля – Шварца [1], рассматривая полосу как двуугольник

$$w(t) = \frac{q}{\pi} ln \frac{t-a}{1-a} - iq \qquad (2)$$

Для установления правильности формулы (2) достаточно проверить выполнение граничных условий. В промежутках $AM(a < t < m), MN(m < t < n), N Д(n < t < 1)$и $DC(1 < t < \infty) Imw = -q$. В промежутках AB(0$< t < a$) и BC(-$\infty < t < 0$) $Imw = 0$:

$$AB(t < a) Imw = Im\left[\frac{q}{\pi}\ln\left(\frac{a-t}{1-a}\right)e^{i\pi} - iq\right] = 0,$$

$$AM(t > a) Imw = Im\left[\frac{q}{\pi}\ln\left(\frac{t-a}{1-a}\right) - iq\right] = -q.$$

В верхней полуплоскости функция w(t) аналогична.

Перейдем к определению комплексной скорости $\bar{\zeta} = \frac{dw}{(v_0 dz)}$. При отображении области течения на плоскости Н.Е. Жуковского получаем двулистную (римановскую) поверхности. Ввиду сложности отображения этой области в верхнюю полуплоскости $t(Imt \geq 0)$ применим интегральную формулу Шварца [1] для верхней полуплоскости

$$F(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ImF(\xi)d\xi}{\xi - t} \tag{3}$$

Как известно, что функция (3) определяется с помощью известного решения задачи об определении функции комплексного переменного в верхней полуплоскости по её заданной мнимой части. [4]

Для нахождения отображения области изменения функции ω, т.е. для определения $\omega(t)$ введем вспомогательную функцию $\Omega(t)$:

$$\Omega(t) = \frac{\omega(t)}{\sqrt{t}} = \frac{ln\frac{v_0}{v}}{\sqrt{t}} + i\frac{\theta}{\sqrt{t}} \tag{4}$$

легко видеть, что

$$Im\Omega(t) = \begin{cases} O, \text{на линиях: АМ, ДС, СВ} \\ \dfrac{\theta(\xi)}{\sqrt{\xi}}, \text{на линиях } MN, ND \\ \dfrac{-\theta_0}{\sqrt{\xi}} \text{ на ВА} \end{cases}$$

Здесь на линии СВ (свободная поверхности струи) $t < 0$ и $v = v_0. Im\Omega(\xi)$ меняется на действительной, а $Re\Omega(\xi)$ на мнимой. Таким образом для функции $\omega(t)/\sqrt{t}$ имеем:

$$\omega(t) = \frac{\theta_0}{\pi}ln\frac{\sqrt{t}+\sqrt{a}}{\sqrt{t}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{t}}{\pi}\int_m^1\frac{\theta(\xi)d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi-t)} \tag{5}$$

Значение интеграл в (5) определяется как предельные значение интеграла типа Коши:

$$\int_m^1\frac{\theta(\xi)d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi-t)} = \int_m^1\left\{\frac{\theta(\xi)}{\sqrt{\xi}} - \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}\right\}\frac{d\xi}{\xi-t} + \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}ln\frac{1-t}{t-m} \tag{6}$$

откуда функция Жуковского окончательно примет вид:

$$\omega(t) = ln\left\{\frac{\sqrt{t}+\sqrt{a}}{\sqrt{t}-\sqrt{a}}\right\}^{\theta_{0/\pi}} \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{t}}{\pi}}\int_m^1\frac{\theta(\xi)d\xi}{\sqrt{\xi}\,(\xi-t)} \tag{7}$$

$$\zeta(t) = \left\{\frac{\sqrt{t}+\sqrt{a}}{\sqrt{t}-\sqrt{a}}\right\}^{\theta_{0/\pi}} exp\left[\frac{\sqrt{t}}{\pi}\int_m^1\frac{\theta(\xi)d\xi}{\sqrt{\xi}\,(\xi-t)}\right] \tag{8}$$

$$\bar{\zeta}(t) = \left\{\frac{\sqrt{t}-\sqrt{a}}{\sqrt{t}+\sqrt{a}}\right\}^{\theta_{0/\pi}} exp\left\{\frac{\sqrt{t}}{\pi}\int_{\mathrm{m}}^1\frac{\theta(\xi)\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi}\,(\xi-t)}\right\}^{-1} \tag{9}$$

При этом формула для комплексной координаты течения имеет вид

$$z(t) = \frac{q}{\pi v_0} \int_0^t \frac{1}{\bar{\zeta}(t)} \frac{dt}{t-a} + ih \qquad (10)$$

где $h = |OB|$ (см. рис.1).

В формуле (9) обеспечено нужное соответствие характерных точек границы:

$$\bar{\zeta}_A(a) = \{v = 0\}, \bar{\zeta}_B(0) = \begin{Bmatrix} v = v_0 \\ \theta = -\theta_0 \end{Bmatrix}, \bar{\zeta}_c(\infty) = \begin{Bmatrix} v = v_0 \\ \theta = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\zeta}_M(m) = \begin{Bmatrix} v = 0 \\ \theta = \pi/2 \end{Bmatrix}, \bar{\zeta}_Д(1) = \begin{Bmatrix} v = 0 \\ \theta = -\pi/2 \end{Bmatrix}$$

Так как функция $\bar{\zeta}(t) = dw/(v_0 dz)$ удовлетворяет граничным условиям задачи и аналитична в любой точке верхней полуплоскости $t(lmt \geq 0$, то формула (9) решает задачу о конформном отображении $\bar{\zeta}(t)$ на верхней полуплоскости t.

Формулы (2), (9) и (10) дают общее решение задачи в параметрической форме. При изучении обтекание заданного контура зависимостью θ от t на линии MND заранее неизвестно, а она необходима для окончательного решения задачи.

Рассмотрим обтекание криволинейного контура с простой зависимостью θ от t в виде квадратного трехчлена

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \qquad (11)$$

где a_0, a_1, a_2 - произвольные постоянные. Коэффициенты a_0, a_1, a_2 находятся следующим образом. Предположим, что вектор скорости с обтекаемым криволинейным контуром MND в точках M, N и D составят с положительной стороны оси OX углы, соответственно равные: $\pi/2$, 0 и $-\pi/2$; $\left[\frac{\pi}{2,}, 0 \text{ и } -\pi/2\right]$:

$$\theta(m) = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 = \pi/2,$$
$$\theta(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 = 0, \qquad (12)$$
$$\theta(1) = a_0 + a_1 + a_2 = -\pi/2.$$

Решая систему алгебраических уравнений (12), имеем:

$$a_0 = \frac{n\pi}{2(1-m)(1-n)(n-m)}(1 - n - nm + m^2,$$
$$a_1 = \frac{\pi}{2(1-m)(1-n)(n-m)}(2n^2 - m^2 - 1), \quad (13)$$
$$a_2 = \frac{\pi}{2(1-m)(1-n)(n-m)}(1 + m + 2n.$$

Выше полученные формулы позволяют найти наиболее интересную для данной задачи величину коэффициент сжатия струи, равный отношению ширины струи в бесконечности ($h^I = {}^q/_{v_0}$) к ширине отверстии ($h = |OB|, \text{рис}.1$) к стенке OB. Из рис.1. видно, что $\overrightarrow{\text{ДВ}} = \overrightarrow{\text{ДО}} + \overrightarrow{\text{OВ}}$; ($|\overrightarrow{\text{ДО}}| = L$, $|\overrightarrow{OB}| = h$). Для определения L и h рассмотрим изменения z(t) от точки D(t=1) до точки B(t=0)

$$l + ih = \frac{h^I}{\pi}\left\{\int_1^0 \zeta(t)\frac{dt}{t-a}\right\} \quad (14)$$

Преобразуем выражение (14)

$$l + ih = \frac{h^I}{\pi}\left\{\int_1^\rho \zeta(t)\frac{dt}{t-a} + \int_{\Gamma_\rho} \zeta(t)\frac{dt}{t-a} + \int_{-\rho}^0 \zeta(t)\frac{dt}{t-a}\right\} \quad *$$

где Γ_ρ – полуокружность с радиусом ρ с центром в точке $B(t = 0)$. Обозначим:

$$I_1 = \int_1^\rho \zeta(t)\frac{dt}{t-a};\ I_2 = \int_{\Gamma_\rho} \zeta(t)\frac{dt}{t-a};\ I_3 = \int_{-\rho}^0 \zeta(t)\frac{dt}{t-a}; \quad (15)$$

В интеграле $I_3\ t < 0.\text{При}\ t = -\tau\ (\tau \geq 0), \text{модуль}\ |\zeta(\tau)| = 1,$ а аргумент имеет вид:

$$A(\tau) = \frac{\theta_0}{\pi}\left(-\pi + 2arctg\sqrt{{}^\tau/_a}\right) + \frac{\theta(t)}{\pi} \quad (16)$$

Таким образом: $I_3 = \int_0^\rho e^{iA(\tau)}\frac{d\tau}{\tau+a} = -\int_0^\rho\{cosA + isinA\}\frac{d\tau}{\tau+a}$

Откуда Re$I_3 = -\int_0^\rho \cos[-A(\tau)]\frac{d\tau}{\tau+a},\ ImI_3 = \int_0^\rho sin[-A(\tau)]\frac{d\tau}{\tau+a}$ (17)

Интеграл $I_1\ \rho \to +\infty$ существует, органичен и действителен, а I_2 при этом принимает значение (iπ). Подставляя в выражение (*) значения интегралов I_1, I_2, I_3 для L и h имеем:

$$L = Re\int_1^0 \frac{dz}{dt}dt = \frac{h^I}{\pi}\left\{\int_1^\rho \zeta(t)\frac{dt}{t-a} + \int_0^\rho cos[-A(\tau)]\frac{d\delta}{\tau+a}\right\} \quad (18)$$

$$h = Im\int_1^0 \frac{dz}{dt}dt = \frac{h^I}{\pi}\left\{1 + \frac{1}{\pi}\int_0^\rho sin[-A(\tau)]\frac{d}{\tau+\alpha}\right\} \quad (19)$$

Коэффициент сжатия струи находится из формулы (19)

$$\kappa_0 = \frac{h^I}{h} = \frac{\pi}{\pi + \int_0^\infty sin[-A]\frac{d\tau}{\tau + a}} \qquad (20)$$

Рассмотрим случаи, когда отсутствует препятствие, т.е. $a = m = n = 1$. При этом $\mathrm{A}(\tau)$ примет вид:

$$A(\tau) = \frac{\theta_0}{\pi}\left(-\pi + 2arctg\sqrt{\tau}\right) = -\frac{2\theta_0}{\pi}(\frac{\pi}{2} - arctg\sqrt{\tau})$$

Обозначим, ${}^{\delta}/_{2} = {}^{\pi}/_{2} - arctg\sqrt{\tau}$; оттуда $tg\frac{\delta}{2} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$ или $\tau = ctg\frac{\delta}{2}$.

$$d\tau = -ctg\frac{\delta}{2}\frac{dG}{sin^2\frac{\delta}{2}};\ \frac{d\tau}{1+\tau} = -ctg\frac{\delta}{2}dG$$

$$\int_0^\infty sin\left[[-A(\tau)]\frac{d\tau}{\tau+1} = \int_0^\infty sin\frac{2\theta_0}{\pi}(\frac{\pi}{2} - arctg\sqrt{\tau})\right] = \int_0^\pi sin\eta\delta \cdot ctg\frac{\delta}{2}d\delta$$

Следовательно, имеем:

$$K_0 = \frac{\pi}{\pi + \int_0^\pi sin\varkappa\pi ctg\frac{\delta}{2}d\delta},$$

получим формулу для коэффициента сжатия струи в задаче «Симметричного истечения из цели между двумя стенками» [1].

Для того чтобы найти уравнения свободной линии тока ВС, достаточно вычислить интеграл, входящий в (10). Разделив действительную и мнимую части можно получить уравнение линии тока свободной поверхности в параметрической форме:

$$\chi(\tau) = \frac{h^I}{\pi}\int_0^\tau cos[-A(\tau)]\frac{d\tau}{\tau+a},$$

$$y(\tau) = h + \frac{h^I}{\pi}\int_0^\tau sin[-A(\tau)]\frac{d\tau}{\tau+a}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М.И. Теория струи идеальной жидкости. Гос.издат.физ.мат. литературы. Москва 1961 г.

2. Абдылдаев М.Ю. Истечение из цели между двумя плоскостями при наличии пластины на оси щели. Известия А.Н.Узб. ССр. серия тех. наук №6 1968 г. Ташкент
3. Абдылдаев М.Ю. Плоские задачи теории струй идеальной жидкости НАН КР «илим» 1999 г. Бишкек
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Наука, Москва 1973 г.