УДК 517.977.5, 338.2

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВАЛОВОГО ПРОДУКТА МЕЖДУ ПОТРЕБИТЕЛЯМИ

Аширбаев Б. Ы[1]., Осмонканов А. М[2]., Модонов М.А[2]
КРСУ им Б. Ельцина[1], КГТУ им. И.Раззакова[2]

В данной статье построен динамический модель межотраслевого баланса предусматривающий наибольшее потребления и обеспечивающий эффективный процесс распределения валового продукта между потребителями.

На основе использования принципа максимума Понтрягина, предложен способ определения оптимального распределения валового продукта между потребителями, при наибольшем среднедушевом потреблении.

Ключевые слова: межотраслевой баланс, валовый продукт, среднедушевое потребления, конечный продукт, капитальные вложения, фондоемкость продукции, производственные материальные затраты, темпы производственных фондов.

ДҮҢ ПРОДУКТЫНЫ КЕРЕКТӨӨЧҮЛӨР АРАСЫНДА ОПТИМАЛДУУ БӨЛҮШТҮРҮҮ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Аширбаев Б. Ы[1]., Осмонканов А. М[2]., Модонов М.А[2].
Б. Ельцин атындагы КОСУ[1], И. Раззаков атындагы КМТУ[2]

Макалада эң чоң керектөөнү жана дүң продуктыны керектөөчүлөр арасында бөлүштүрүүнүн эффективдүү процессин камсыз кылуучу тармактар аралык баланстын динамикалык модели түзүлдү.

Понтрягиндин максималдык принцибин колдонуунун негизинде ар бир жаранга эң чоң орточо керектөөнү камсыз кылуучу, дүң продуктыны керектөөчүлөр арасында бөлүштүрүүнүн оптималдуу ыкмасы сунушталды.

Баштапкы сөздөр: тармактар аралык баланс, дүң продукты, ар бир жаранга орточо керектөө, акыркы продукт, капиталдык салымдар, продукциянын фонддук сыйымдуулугу, өндүрүштүк материалдык чыгымдар, өндүрүштүк фонддордун темпи.

SOLUTIONS TO THE PROBLEM OF OPTIMAL DISTRIBUTION OF GROSS PRODUCT BETWEEN CONSUMERS

Ashirbaev B.Y[1]., Osmonkanov A. M[2]., Modonov M.A[2]
KRSU named after B. Yeltsin[1], KSTU named after I. Razzakov[2]

In this article, a dynamic model of input-output balance has been built that provides for the greatest consumption and ensures an efficient process of distributing the gross product among consumers.

Based on the use of the Pontryagin maximum principle, a method is proposed for determining the optimal distribution of the gross product among consumers at the highest average per capita consumption.

Keywords: input-output balance, gross product, per capita consumption, final product, capital investments, capital intensity of products, production material costs, rates of production assets.

Рассмотрим статическую линейную межотраслевую модель Леонтьева

$$X = AX + Y, \tag{1}$$

где X −вектор валового выпуска продукции, Y −вектор конечной продукции, A −матрица прямых материальных затрат:

$X = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}'$, $Y = \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}', A = (a_{ij}) \geq 0; i, j = \overline{1, n};$ штрих обозначает транспонирование.

Известно, что конечный продукт Y состоит из двух частей [1]

$$Y = C + D, \tag{2}$$

где C −потребление, D − капитальные вложения.

Если капитальные вложения в процессе производства используются на расширения производства и если предположить, что все финансы (материалы, ресурсы) выделяются полностью в начале процесса, то такой экономический процесс описывается динамической межотраслевой моделью Леонтьева [2]

$$X(t) = AX(t) + B[X(t + \mu) - X(t)] + C(t), \tag{3}$$

где B −матрица фондоемкости продукции, $B = (b_{ij}),\ i, j = \overline{1, n};$

$C(t) \geq 0,\ t$ −время, $t = 1,2, \cdots;$ μ −малый положительный параметр.

Введем относительные переменные [3]: $x=\frac{X}{L}$, $c=\frac{C}{L}$, где x –количество валовой продукции производимой в единицу времени (производительность труда), c – количество потребляемой продукции в единицу времени (среднедушевое потребление), L – трудовые ресурсы. Тогда используя приближение $\frac{x(t+\mu)-x(t)}{\mu}\approx\frac{dx}{dt}$ из уравнения (3) получаем сингулярно-возмущенное дифференциальное уравнение

$$\mu\dot{x}(t)=\frac{1-a}{b}x(t)-\frac{1}{b}c(t), \qquad (4)$$

где a –коэффициент производственных материальных затрат, b – коэффициент определяющий темпы роста производственных фондов.

Интенсивность валового выпуска в начальный момент времени определяется равенством

$$x(0)=x_0. \qquad (5)$$

Из условия $\mu\dot{x}(t)\geq 0$ вытекает следующее ограничение на величину потребления

$$0\leq c\leq(1-a)x. \qquad (6)$$

Чтобы определить наиболее эффективный процесс распределения валового продукта, необходимо задать критерий в виде функционала, определяющий качества переходного процесса описываемой уравнением (4).

Критерий предусматривающий наибольшее потребления и обеспечивающий эффективный процесс распределения валового продукта может быть выражена функционалом [1]

$$J=\frac{\alpha}{2}\int_0^T e^{-\delta t}c^2(t)dt+\beta x(T), \qquad (7)$$

α – коэффициент эластичности выпуска по производственным капитальным средством, β – коэффициент выпуска по труду, $e^{-\delta t}$ –взвешивающая функция, δ – коэффициент дисконтирования, $0\leq t\leq T$.

Теперь сформулируем задачу оптимального распределения валового продукта между потребителями, в следующей форме: требуется найти минимум функционала

$$J = -\frac{\alpha}{2}\int_0^T e^{-\delta t}c^2(t)dt + \beta x(T), \quad (8)$$

при ограничениях (4) – (6).

Для нахождения допустимого управления $c(t)$ и соответствующей оптимальной траектории $x(t)$ воспользуемся алгоритмом принципа максимума Понтрягина [1].

Составляем гамильтониан

$$H(t,\psi,x,c) = \left[\psi\left(\frac{1-a}{b\mu}x - \frac{1}{b\mu}c\right) + \frac{\alpha}{2}e^{-\delta t}c^2\right]. \quad (9)$$

Необходимое условие экстремума гамильтониана H по управлению c имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial c} = -\frac{\psi}{b\mu} + e^{-\delta t}\alpha c = 0.$$

Тогда

$$c(t) = \frac{1}{b\mu\alpha}e^{\delta t}\psi(t). \quad (10)$$

Далее, краевая задача составляем в форме:

$$\dot{x}(t) = \frac{1-a}{b\mu}x(t) - \frac{1}{b^2\mu^2\alpha}e^{\delta t}\psi(t),\ \ x(0) = x_0, \quad (11)$$

$$\dot{\psi}(t) = \frac{1-a}{b\mu}\psi(t).$$

Решения второго уравнения (11) имеет вид

$$\psi(t) = e^{\frac{1-a}{b\mu}t}. \quad (12)$$

Тогда оптимальное потребление $c(t)$ с учетом (12) записываем в виде

$$c(t) = \frac{1}{b\mu\alpha}e^{\left(\delta+\frac{1-a}{b\mu}\right)t}. \quad (13)$$

Из условия трансверсальности [1] граничное условие для $\psi(t)$ определяется соотношением

$$\psi(T) = \beta x(T), \quad (14)$$

отсюда имеем

$$x(T) = \frac{1}{\beta} e^{\frac{1-a}{b\mu}T}. \quad (15)$$

С учетом (12) соотношение $\dot{x}(t)$ из (11) записываем в виде

$$\dot{x}(t) = \frac{1-a}{b\mu} x(t) - \frac{1}{b^2\mu^2\alpha} e^{\delta t} e^{\frac{1-a}{b\mu}t},\ x(0) = x_0. \quad (16)$$

Пусть решения уравнения (16) имеет вид

$$x(t) = k(t)v(t), \quad (17)$$

тогда уравнения (16) записывается в форме

$$\dot{k}v + k\left(\dot{v} - \frac{1-a}{b\mu} v\right) = -\frac{1}{b^2\mu^2\alpha} e^{\delta t} e^{\frac{1-a}{b\mu}t}. \quad (18)$$

Из уравнения $\dot{v} - \frac{1-a}{b\mu} v = 0$ находим $v = e^{\frac{1-a}{b\mu}t}$.

Подставляя значения v в равенству (18) имеем

$\dot{k} e^{\frac{1-a}{b\mu}t} = -\frac{1}{b^2\mu^2\alpha} e^{\delta t} e^{\frac{1-a}{b\mu}t}$ или

$$k(t) = -\frac{1}{b^2\mu^2\alpha} e^{\delta t} + s, \quad (19)$$

где s –произвольная постоянная.

Теперь подставляя значения $v(t)$ и $k(t)$ в (17) получаем общее решение для $x(t)$

$$x(t) = \left(s - \frac{1}{b^2\mu^2\alpha} e^{\delta t}\right) e^{\frac{1-a}{b\mu}t}. \quad (20)$$

С учетом (15) из выражения (20) определяем s:

$\frac{1}{\beta} e^{\frac{1-a}{b\mu}T} = \left(s - \frac{1}{b^2\mu^2\alpha} e^{\delta T}\right) e^{\frac{1-a}{b\mu}T}$ или

$$s = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{b^2\mu^2\alpha} e^{\delta T}. \quad (21)$$

Тогда из (20) имеем

$$x(t) = \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{b^2\mu^2\alpha}\left(e^{\delta T} - e^{\delta t}\right)\right) e^{\frac{1-a}{b\mu}t}. \quad (22)$$

Функция $x(t)$ (22) определяет оптимальное количество валовой продукции производимой в единицу времени (производительность труда), соответствующей оптимальному потреблению $c(t)$ (13).

Заключение. Полученные результаты работ могут быть использованы при построении статической и динамической модели межотраслевого баланса, которые с помощью этих моделей исследуются, анализируются и планируются экономические процессы на уровне фирмы, предприятий или отраслей страны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория /М.: Прогресс. 1975. - 597 с.
2. Леонтьев В. В. Экономические эссе: теории, исследования, факты и политика /М.: ОАО Издательство “Экономика”, 1990, М.: Политиздат, 1991. - 415 с.
3. Основы теории оптимального управления /Под ред. В.Ф. Кротова //В.Ф. Кротов, Б.А. Лагоша и др. М.: Высшая школа, 1990. - 430 с.