

УДК 532.546

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИКИ ГРЯЗЕВЫХ ПАВОДКОВ

Чечейбаев А.Б.

Кыргызско-германский институт прикладной информатики

Проводится аналитико-численный анализ динамики грязевых паводков на основе модели Иверсона-Денлингера. Исходная система уравнений движения упрощается с помощью метода бегущих волн и метода автомодельных решений, получены численные решения выведенных систем с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации.

Ключевые слова: грязевые паводки, бегущие волны, автомодельные решения, численные решения, метод Рунге-Кутты.

ЫЛАЙЛАНГАН СУУ ТАШКЫНДАРЫНЫН ДИНАМИКАСЫН САНДЫК ЖАНА АНАЛИТИКАЛЫК МОДЕЛДЕШТИРҮҮ

Чечейбаев А.Б.

Кыргыз-герман колдонмо информатика институту

Иверсон-Денлингерди моделинин негизинде ылайланган суу ташкындарынын динамикасынын аналитикалык жана сандык талдоосу жүргүзүлөт. Кыймылдын баштапкы тендемелер системасы чуркоочу толкундар жана автомоделдүү чыгарылыштар ыкмаларынын жардамы менен жөнөкөйлөтүлгөн, алынган системалардын сандык чыгарылыштары Рунге-Куттанынын төртүнчү тартиптеги ыкмасынын жардамы менен табылган.

Баштапкы сөздөр: ылайланган суу ташкындар, чуркоочу толкундар, автомоделдүү чыгарылыштар, сандык чыгарылыштар, Рунге-Куттанын ыкмасы.

NUMERICAL AND ANALYTICAL COMBINED MODELLING THE NON-STEADY DYNAMICS OF DEBRIS-LADEN FLASH FLOODS

Checheibaev A.

Kyrgyz-German Institute of Applied Informatics

Analytical and numerical analysis of the dynamics of the debris-laden flash floods' is conducted based on the Iverson-Denlinger model. The governing system of equations has been simplified using running waves method and self-similar solutions method, the numerical solutions of the derived systems are obtained using Runge-Kutta method of fourth-order accuracy.

Keywords: debris-laden flash floods, running waves, semi-similar solutions, numerical solutions, Runge-Kutta method.

Оползни, сели и грязевые паводки являются видами природных опасных процессов, которые могут произойти на территории Кыргызской Республики и других горных стран после продолжительных проливных дождей. Разработка физико-математических моделей или разностных моделей для получения численных методов решения задач прогнозирования динамики оползней, селей и паводков является одной из актуальных задач современной фундаментальной и прикладной науки.

Использование макроскопического подхода, основанного на допущении непрерывности среды, позволяет использовать современный мощный аппарат математической физики для исследования динамики катастрофических процессов в силу того, что исходная математическая модель представляет собой систему уравнений в частных производных, выражающих законы сохранения массы и импульса.

Рассмотрим динамику грязевых паводков на основе применения физико-математической модели, предложенной известными американскими учеными – гидрологом Р. Иверсоном и геофизиком Р. Делингером. В рамках данной модели, используемой в полной форме для прогнозирования динамики селевых потоков и наводнений [1, 2 и др.]

предполагается, что сель ведет себя как смесь ньютоновской жидкости и кулоновских твердых частиц, взаимодействующих между собой.

Математическая модель для расчета динамики селей и наводнений состоит из усредненных по глубине селевого потока уравнений движения сплошной среды. Модель выражает законы сохранения массы и импульса для смеси кулоновских гранулированных твердых частиц и ньютоновской вязкой жидкости без существенной жидкостной турбулентности.

Математическая модель динамики грязевых паводков, описываемых в рамках физико-математической модели Иверсона- Денлингера, состоит из следующих нелинейных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + g_z \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = g_x h - s_f \cdot u \cdot |u|, \quad (2)$$

$h(x, y)$ – глубина селевого потока, $u(x, y)$ – составляющая скорости движения паводка по оси Ox , g_x, g_z – компоненты ускорения свободного падения, s_f - безразмерный коэффициент турбулентного напряжения.

Так как уравнения (1) - (2) не зависят явно от пространственной и временной переменных, для данной нелинейной системы уравнений в частных производных существуют решения типа бегущих волн.

Для поиска решения в виде бегущих волн введем переменную z , которая связана с исходными переменными в следующей форме [3, 4]:

$$z = k \cdot x - \lambda \cdot t, \quad (3)$$

где λ, k – постоянные, величина λ/k играет роль скорости распространения волны, λ может принимать значения любого знака, значение $\lambda = 0$ соответствует стационарному решению, а значение $k = 0$ - пространственно-однородному решению [3].

Неизвестные распределения глубины и скорости потока будем искать в виде

$$H(z) = h(x, t), \quad U(z) = u(x, t) \quad (4)$$

Тогда частные производные по времени и пространству от глубины и скорости грязевых паводков в уравнениях (1) и (2) будут заменены с помощью следующих соотношений, явно зависящих явно новой переменной z :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\lambda \cdot \frac{dH}{dz}, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = k \cdot \frac{dH}{dz}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda \cdot \frac{dU}{dz}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = k \cdot \frac{dU}{dz} \quad (5)$$

С учетом соотношений (5), уравнение неразрывности (1) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с двумя неизвестными функциями $H(z)$ и $U(z)$:

$$-\lambda \cdot \frac{dH}{dz} + k \cdot \frac{d(H \cdot U)}{dz} = 0 \quad (6)$$

Аналогичным образом, уравнение импульса (2) переходит в следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$-\lambda \cdot \frac{d(H \cdot U)}{dz} + k \cdot \frac{d(H \cdot U^2)}{dz} + k \cdot g_z \cdot H \cdot \frac{dH}{dz} = g_x \cdot H - s_f \cdot U \cdot |U| \quad (7)$$

Далее, проводя несложные алгебраические преобразования над системой уравнений (6) – (7), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для расчета динамики грязевых паводков в рамках модели Иверсона-Денлингера:

$$\frac{dH}{dz} \cdot (k \cdot U - \lambda) + \frac{dU}{dz} \cdot (k \cdot H) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{dH}{dz} (-\lambda U + kU^2 + kg_z H(z)) + \frac{dU}{dz} (-\lambda H + 2kH(z) \cdot U(z)) = g_x H - s_f U |U| \quad (9)$$

Перепишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (8) – (9) в виде, удобном для решения ее численно, с помощью метода Рунге Кутты:

$$\frac{dH}{dz} = \frac{k \cdot s_f \cdot H \cdot U \cdot |U| - k \cdot g_x \cdot H^2}{H \cdot U^2 \cdot k^2 - g_z \cdot H^2 \cdot k^2 - 2 \cdot k \cdot \lambda \cdot H \cdot U + \lambda^2 \cdot H} \quad (10)$$

$$\frac{dU}{dz} = \frac{k \cdot g_x \cdot H \cdot U - k \cdot s_f \cdot U^2 \cdot |U| - g_x \cdot \lambda \cdot H + \lambda \cdot s_f \cdot U \cdot |U|}{H \cdot U^2 \cdot k^2 - g_z \cdot H^2 \cdot k^2 - 2 \cdot k \cdot \lambda \cdot H \cdot U + \lambda^2 \cdot H} \quad (11)$$

Приведем ниже разностные схемы метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности [5 и др.] для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10) – (11):

$$h_{k+1} = h_k + \frac{1}{6}[m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4], \quad (12)$$

$$u_{k+1} = u_k + \frac{1}{6}[n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4], \quad (13)$$

где параметры $m_1, m_2, m_3, m_4, n_1, n_2, n_3, n_4$ определяются так:

$$\begin{aligned} m_1 &= f(x_k, H_k, U_k)\Delta x, \quad m_2 = f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, H_k + \frac{m_1}{2}, U_k + \frac{n_1}{2}\right)\Delta x, \\ m_3 &= f\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, H_k + \frac{m_2}{2}, U_k + \frac{n_2}{2}\right)\Delta x, \\ m_4 &= f(x_k + \Delta x, H_k + m_3, U_k + n_3)\Delta x, \\ n_1 &= q(x_k, H_k, U_k) \cdot \Delta x, \quad n_2 = q\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, H_k + \frac{m_1}{2}, U_k + \frac{n_1}{2}\right)\Delta x, \\ n_3 &= q\left(x_k + \frac{\Delta x}{2}, H_k + \frac{m_2}{2}, U_k + \frac{n_2}{2}\right)\Delta x, \\ n_4 &= q(x_k + \Delta x, H_k + m_3, U_k + n_3)\Delta x. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь имеет место

$$f(x, H, U) = \frac{k \cdot s_f \cdot H \cdot U \cdot |U| - k \cdot g_x \cdot H^2}{H \cdot U^2 \cdot k^2 - g_z \cdot H^2 \cdot k^2 - 2 \cdot k \cdot \lambda \cdot H \cdot U + \lambda^2 \cdot H} \quad (15)$$

$$q(x, H, U) = \frac{k \cdot g_x \cdot H \cdot U - k \cdot s_f \cdot U^2 \cdot |U| - g_x \cdot \lambda \cdot H + \lambda \cdot s_f \cdot U \cdot |U|}{H \cdot U^2 \cdot k^2 - g_z \cdot H^2 \cdot k^2 - 2 \cdot k \cdot \lambda \cdot H \cdot U + \lambda^2 \cdot H} \quad (16)$$

Для численно-аналитического описания динамики грязевых паводков с помощью метода бегущих волн и метода Рунге-Кутты была составлена программа на М-языке системы MATLAB и проведены численные расчеты. Для решения системы (10) – (11) ставилась задача Коши: $H(0) = H_0$, $U(0) = U_0$.

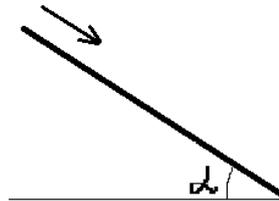


Рис 1. Угол склона к горизонту

Рассматривается задача о сходе грязевого паводка по склону, который составляет угол α градусов по отношению к горизонту (рис. 1).

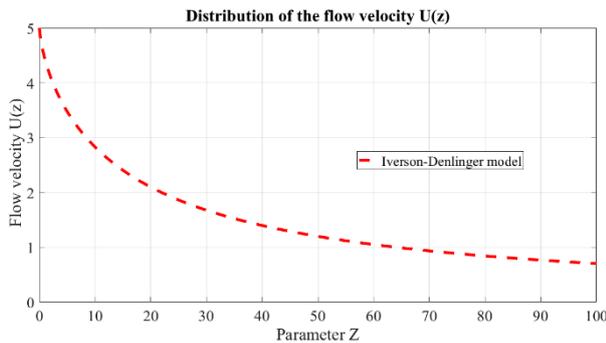


Рис. 2. Распределение скорости потока при

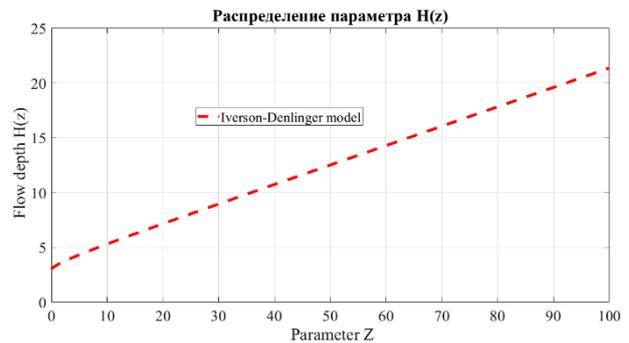


Рис 3. Распределение глубины потока

На рис. 2 и рис. 3 предложены распределения глубины и скорости потока грязевого паводка. Физико-геометрические характеристики склона и потока являются следующими: $\alpha = 10^0$, $g_x = 9,8 \cdot \sin\alpha \frac{M}{c^2}$, $g_z = 9,8 \cdot \cos\alpha \frac{M}{c^2}$, $s_f = 0,1$; $\lambda = 0$, $k = 1$, $H_0 = 3$ м, $U_0 = 5 \frac{M}{c}$. Так, при изменении параметра z от нуля до 100 м, глубина потока увеличивается почти монотонно линейно от 3 м до 21,35 м, тогда как скорость потока уменьшается от $5 \frac{M}{c}$ до $0,7 \frac{M}{c}$.

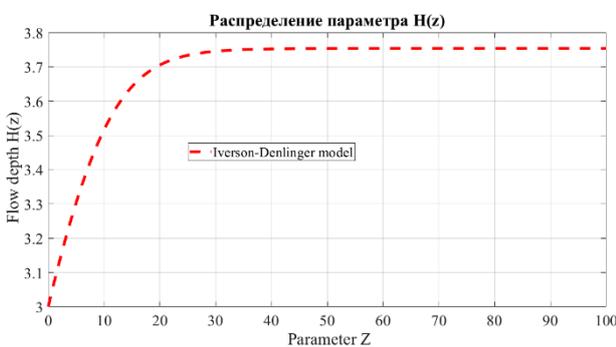


Рис. 3. Распределение глубины потока

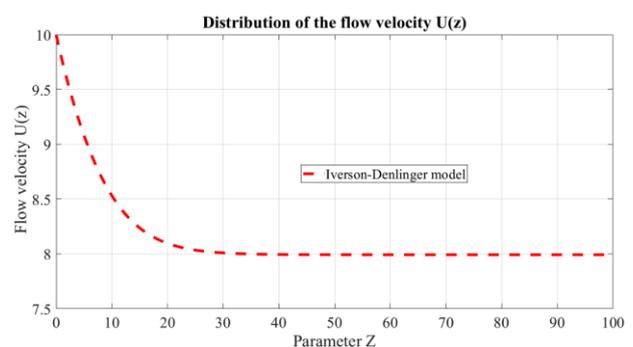
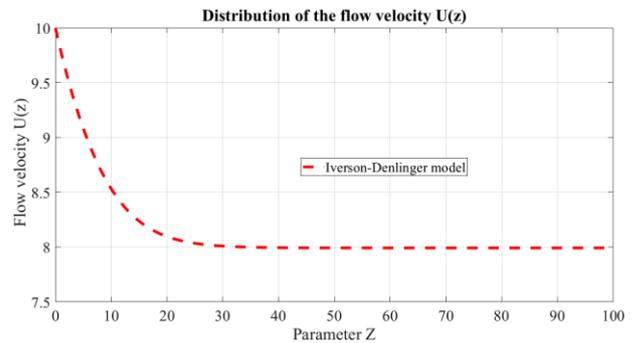
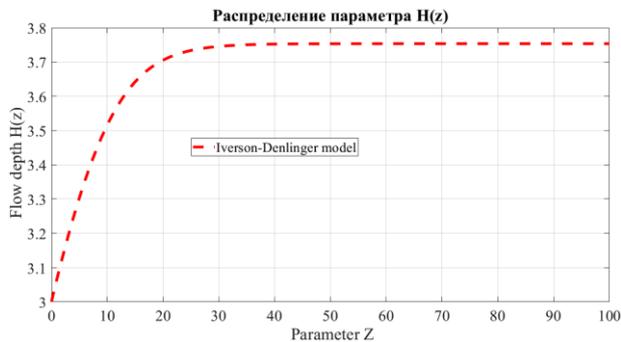


Рис 4. Распределение скорости потока

На рис. 4 и рис. 5 предложены распределения глубины и скорости потока грязевого паводка. Физико-геометрические характеристики склона и потока являются следующими: $\alpha = 10^0$, $g_x = 9,8 \cdot \sin\alpha \frac{M}{c^2}$, $g_z = 9,8 \cdot$

$\cos\alpha \frac{M}{c^2}$, $s_f = 0,1$; $\lambda = 0$, $k = 1$, $H_0 = 3$ м, $U_0 = 10 \frac{M}{c}$. Так, при изменении параметра z от нуля до 30 м, глубина потока значительно увеличивается от 3 м до 3,75 м, в то время как скорость потока уменьшается от $10 \frac{M}{c}$ до



$8,01 \frac{M}{c}$. Далее, на интервале от 30 м до 100 м, глубина потока незначительно увеличивается от 3,75 м до 3,754 м, тогда как скорость потока уменьшается от $8,01 \frac{M}{c}$ до $7,99 \frac{M}{c}$.

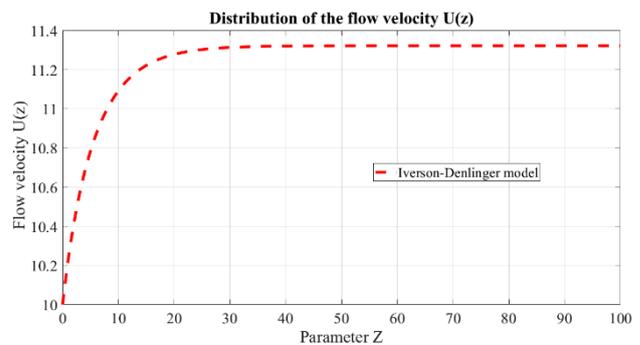
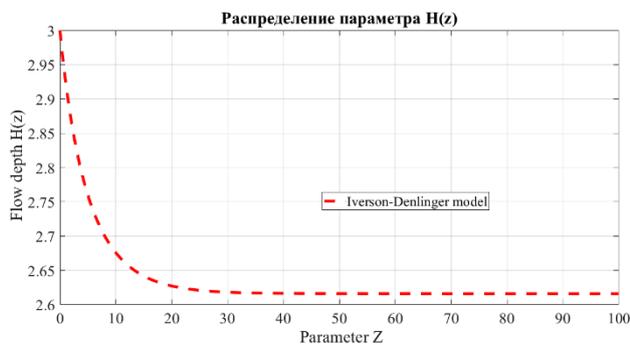


Рис. 6. Распределение глубины потока

Рис 7. Распределение скорости потока

На рис. 6 и рис. 7 предложены распределения глубины и скорости потока грязевого паводка. Физико-геометрические характеристики склона и потока являются следующими: $\alpha = 30^0$, $g_x = 9,8 \cdot \sin\alpha \frac{M}{c^2}$, $g_z = 9,8 \cdot \cos\alpha \frac{M}{c^2}$, $s_f = 0,1$; $\lambda = 1$, $k = 1$, $H_0 = 3$ м, $U_0 = 10 \frac{M}{c}$. Так, при изменении параметра z от нуля до 15,22 м, глубина потока существенно уменьшается от 3 м до 2,64 м, тогда как скорость потока увеличивается от $10 \frac{M}{c}$ до $11,22 \frac{M}{c}$. Далее, на интервале от 15,22 м до 100 м, глубина потока незначительно

уменьшается от 2,64 м до 2,616 м, скорость потока увеличивается от 11,22 $\frac{м}{с}$ до 11,32 $\frac{м}{с}$.

Следуя монографии [3], будем искать автомодельные решения системы уравнений в частных производных (1) – (2), описывающие динамику грязевых паводков в рамках модели Иверсона-Денлингера в виде:

$$h(x, t) = t^\alpha \cdot H(\xi), \quad u(x, t) = t^\gamma \cdot U(\xi), \quad \text{где } \xi = x \cdot t^\beta. \quad (17)$$

Заметим, что профили решений в разные моменты времени получаются друг из друга преобразованиями подобия, т.е. преобразованиями типа растяжения или сжатия [3].

Проверим, допускает ли система (1) – (2) существование автомодельных решений. Для этого сделаем замену переменных:

$$t = C \cdot \bar{t}, \quad x = C^k \cdot \bar{x}, \quad h = C^m \cdot \bar{h}, \quad u = C^n \cdot \bar{u}, \quad (18)$$

где $C > 0$ - произвольная постоянная.

Выразим частные производные от функций глубины $h(x, t)$ и скорости потоков $u(x, t)$ следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = C^{m-1} \cdot \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = C^{n-1} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = C^{m-k} \cdot \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = C^{n-k} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \quad (19)$$

Автомодельные решения системы уравнений (1) – (2) будут существовать, если существует набор значений m , n и k , при выборе которых и подстановке соотношений (19) в исходную систему уравнений (1) (2) данная система в результате преобразования переходит точно в такую же систему. Тогда, подставляя соотношения (19) в исходную систему (1) – (2), получим следующую видоизмененную системы:

$$C^{m-1} \cdot \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + C^{m+n-k} \cdot \frac{\partial(\bar{h} \cdot \bar{u})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad (20)$$

$$C^{m+n-1} \frac{\partial(\bar{h} \bar{u})}{\partial \bar{t}} + C^{m+2n-k} \frac{\partial(\bar{h} \bar{u} \bar{u})}{\partial \bar{x}} + C^{2m-k} g_z \bar{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} = C^m g_x \bar{h} - C^{2n} S_f \bar{u} \cdot |\bar{u}| \quad (21)$$

Заметим, что при выполнении условий $n = 1$, $m = 2$, $k = 2$ исходная система (1) – (2) и система уравнений (20) – (21) совпадают. Параметры

$n = 1, m = 2, k = 2$ связаны с константами α, β, γ так: $\alpha = m, \beta = -k, \gamma = n$.

Далее используем следующую замену переменных:

$$h(x, t) = t^2 \cdot H(\xi), \quad u(x, t) = t \cdot U(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t^2},$$

Частные производные от глубины и скорости потоков заменим через соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= 2t \cdot H(\xi) - \frac{2x}{t} \cdot \frac{dH(\xi)}{d\xi}, & \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{dH(\xi)}{d\xi}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= U(\xi) - \frac{2x}{t^2} \cdot \frac{dU(\xi)}{d\xi}, & \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{t} \cdot \frac{dU(\xi)}{d\xi} \end{aligned}$$

Тогда исходная система уравнений в частных производных первого порядка (1) – (2) преобразуется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dH}{d\xi} \cdot (U - 2\xi) + \frac{dU}{d\xi} \cdot H + 2 \cdot H = 0,$$

$$\frac{dH}{d\xi} (U^2 - \xi + g_z H) + \frac{dU}{d\xi} (2HU - \xi H) + H(U + 2 - g_x) + s_f U \cdot |U| = 0$$

Полученную систему ОДУ перепишем в форме, удобной для реализации вычислительного алгоритма метода Рунге-Кутты:

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{2H - g_x \cdot H - 3HU + 2H \cdot \xi + s_f U \cdot |U|}{U^2 - 5\xi U + 2\xi^2 + \xi - g_z H}, \quad (22)$$

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{2H^2 - HU^2 - 2HU + 4\xi H + g_x HU - 2g_x H\xi + 2\xi HU - s_f U^2 \cdot |U| + 2s_f \xi U \cdot |U|}{HU^2 - g_z H^2 - 5HU\xi + 2H\xi^2 + H\xi} \quad (23)$$

Для получения численных решений системы (22) – (23) с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации [5 и др.], используем разностные соотношения (12) – (14), полагая, что

$$f(x, H, U) = \frac{2H - g_x \cdot H - 3HU + 2H \cdot \xi + s_f U \cdot |U|}{U^2 - 5\xi U + 2\xi^2 + \xi - g_z H}, \quad (24)$$

$$q(x, H, U) = \frac{2H^2 - HU^2 - 2HU + 4\xi H + g_x HU - 2g_x H\xi + 2\xi HU - s_f U^2 \cdot |U| + 2s_f \xi U \cdot |U|}{HU^2 - g_z H^2 - 5HU\xi + 2H\xi^2 + H\xi} \quad (25)$$

Для численно-аналитического описания динамики грязевых паводков с помощью метода автомодельных решений и метода Рунге-Кутты бала составлена программа на М-языке системы MATLAB и проведены

численные расчеты. Для решения системы (24) – (25) ставилась задача Коши: $H(0) = H_0, U(0) = U_0$.

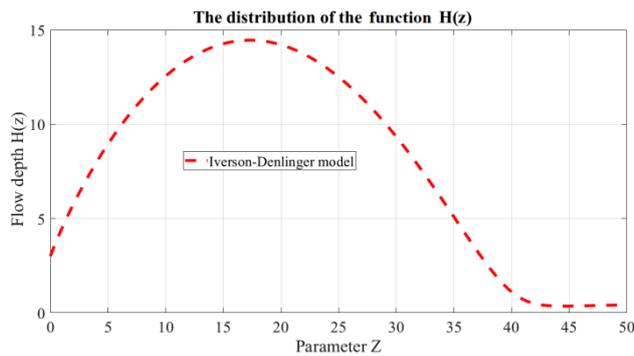


Рис. 6. Распределение глубины потока

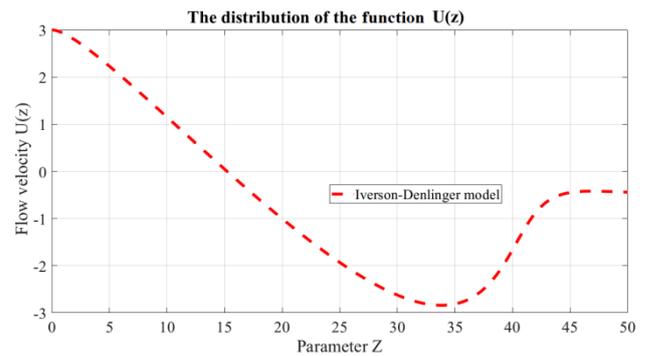


Рис 7. Распределение скорости потока

На рис. 8 и рис. 9 предложены распределения глубины и скорости потока грязевого паводка. Физико-геометрические характеристики склона и потока являются следующими: $\alpha = 20^0$, $g_x = 9,8 \cdot \sin\alpha \frac{M}{c^2}$, $g_z = 9,8 \cdot \cos\alpha \frac{M}{c^2}$, $s_f = 0,1$; $H_0 = 3$, $U_0 = 10$. Так, при изменении параметра ξ от нуля до 17,313, функция $H(\xi)$ растёт с 3 до 14,452, затем, на интервале от 14,452 до 42, функция $H(\xi)$ убывает с 14,452 до 0,489, далее, на интервале от 42 до 50, данная функция медленно убывает от 0,489 до 0,422. Что касается функции $U(\xi)$, то на интервале значений независимого аргумента ξ от нуля до 33,8360 данная функция убывает от 3 до -2,84. На интервале значений ξ от 33,836 до 46,879, значения функции $U(\xi)$ увеличиваются с -2,84 до -0,42017. Затем, на интервале от 46,879 до 50, функция $U(\xi)$ снижается от -0,42017 до -0,44097.

Таким образом, в данной статье исходная система уравнений в частных производных, описывающая динамику грязевых паводков в рамках модели Иверсона-Денлингера была упрощена и была сведена к двум различным системам обыкновенных дифференциальных уравнений при использовании двух различных аналитических методов - метода бегущих волн и метода автомодельных решений. Далее, полученные системы ОДУ были численно решены с помощью метода Рунге-Кутты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Roger P. Denlinger, Richard M. Iverson. Flow of variably fluidized granular masses across three-dimensional terrain 2. Numerical predictions and experimental tests // Journal of Geophysical Research, Vol. 106, NO. B1, pp. 553-566, January 10, 2001.
2. Richard M. Iverson, Roger P. Denlinger. Mechanics of debris flows and debris laden flash floods // Proceedings of the Seventh Federal Interagency Sedimentation Conference, March 25 to 29, 2001, Reno, Nevada.
3. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. – М.: Физматлит, 2005. – 256 с.
4. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. - М.: Физматлит, 2002. - 432 с.
5. Hoffman J.D. Numerical methods for engineers and scientists. 2nd edition. - New- York: Marcel Dekker Inc., 2001. – 384 p.