УДК: 532.5

КАВИТАЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНКИ ПОТОКОМ ИСТОЧНИКА ПО СХЕМЕ ГИЛЬБЕРГА – ЭФРОСА

Абдылдаев М.Ю., Керимов У.Т., Мукамбетова Н.Т, Ачекеев К.С.
Кыргызский Государственный Университет им. И.Арабаева

Исследуется плоская задача гидродинамики, связанной с кавитацией течение. Рассматривается кавитационные обтекание по схеме Гильберга-Эфроса. Находится общее решение задачи в параметрической форме. Особое внимание обращается нахождение число кавитации. Производится сравнения коэффициента сопротивления. Задача решается методам Н.Н.Жуковского.

Ключевые слова: струи, жидкость, пластина, полуплоскость, кавитации, линии тока.

ГИЛБЕРГ-ЭФРОС СХЕМАСЫ БОЮНЧА БУЛАК АГЫМЫ БОЮНЧА ПЛАСТИНКАНЫН АЙЛАНАСЫНДАГЫ КАВИТАЦИЯ АГЫМЫ

Абдылдаев М.Ю., Керимов У.Т., Мукамбетова Н.Т, Ачекеев К.С.
И.Арабаев ат.Кыргыз мамлекеттикуниверситети

Кавитация агымы менен байланышкан гидродинамикалык тегиздик маселеси изилденген. Гилберг-Эфрос схемасынын айланасындагы кавитация агымы каралат. Маселенин жалпы чечими параметрдик формада табылат. Кавитациянын санын табуугa өзгөчө көңүл бурулду. Салыштыруу каршылык коэффициенти жүрүп жатат. Маселе Н. Н. Жуковскийдин методдору менен чыгарылат.

Баштапкы сөздөр: реактивдүү учактар, суюктук, пластина, жарым тегиздик, кавитация, ток сызыктары.

CAVITATION FLOW AROUND A PLATE BY A SOURCE FLOW ACCORDING TO THE GILBERG-EFROS SCHEME

Abdyldaev M.Y., Kerimov U.T., Mukambetova N.T, Achekeev K.S.

A plane problem of hydrodynamics associated with cavitation flow is investigated. The cavitation flow around the Gilberg-Efros scheme is considered.

The general solution of the problem is found in parametric form. Particular attention is drawn to finding the cavitation number. The drag coefficient is compared. The problem is solved by the methods of N.N. Zhukovsky.
Key words: jets, liquid, plate, half-plane, cavitation, streamlines.

Изучение кавитационных течений представляет большой теоретический и практический интерес, однако математическое исследования возникающих задач сопряжены со значительными трудностями.

Одной из наиболее простых схем кавитационного обтекания тела является схема Гильберга – Рошко – Эфроса [1] с возвратной струей, уходящей на второй лист римановой поверхности. Плоская пластинка расположена нормально к набегающему патоку источника. Паток вызван источником, расположенным в точке S (рис.1). Задачей подобного рода занимались М.И. Хмельник, М.Ю.Абдылдаев и ряд других авторов [1,2,3]. Ввиду технических приложений при рассмотрении задач, имеющих зоны кавитации, предполагается следующая схематация (моделирование) потоков жидкости при обтекании лопастей гидротурбин, радиально расположенных по отношению *K* оси турбины.

Рассмотрим кавитационное обтекание плоский пластинки потоком источника по схеме с возвратной струей, уходящей на второй лист римановой поверхности (рис.1). Обтекание происходит безвихревым потоком невесомой идеальной несжимаемой жидкостью. Как известно, что математическая теория плоских течений идеальной жидкости оперирует с тремя комплексными величинами: координатой точки z=x+iy, комплексным потенциалом $w = \varphi + i\psi$ и комплексной (сопряженной) скоростью $\zeta = U + iv$ от скорости $\zeta = U - iv$ [4]

Задача решается методом Н.Е. Жуковского [1]:

$$\omega = ln\zeta = -ln\frac{dw}{(V_0 dz)} = ln\frac{v_0}{v} + i\theta \tag{1}$$

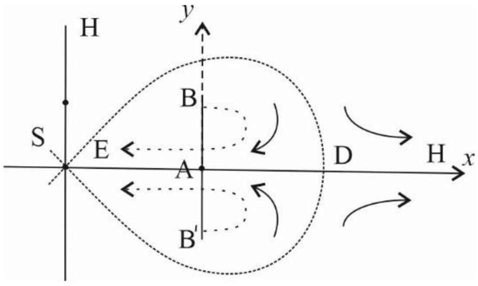

Рис.1. Картина течений в физической плоскости $z = x = iy$

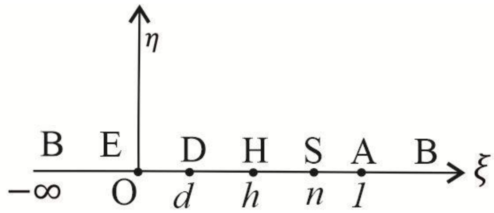

Рис.2. Параметрическая плоскость $t = \xi + i\eta$

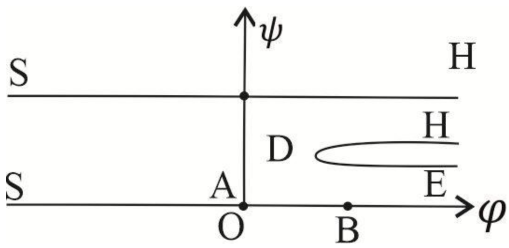

Рис.3. Область изменения комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$

Решим задачу схема которой изображена на рис.1. Найдем dw/dz и dw/dt в функции параметрического вспомогательного переменного изменягощегося в верхней полуплоскости t($Imt \geq 0$) (рис.2). Ввиду симметричности течения нам достаточно будет исследовать верхнюю его половину, заменяя при этом ось симметрии твердой стенкой $(Jmz \geq 0, z = x + iy)$.

Рассмотрим комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$. Предположим, что функция тока на линии SABE равно нулю $(\psi = 0)$, а на линии SH функция тока равно $\psi = q/4$. Таким образом область изменения W представляет собой полосы шириной q/4 с разрезом вдоль линии ДЕ и ДН (рис.3). Рассмотрим область изменения функции W как четыреугольник с вершинами в точках S,E,D,H соответствующими углами:

$$\alpha_S = 0, \alpha_E = 0, \alpha_D = 2\pi, \alpha_H = 0.$$

Для получения отображения (внутренности) четырёхугольника SEDH на верхнюю полуплоскость $t(Imt \geq 0)$ (рис.2) можно воспользоваться формулой Кристоффеля – Шварца $[1]$:

$$W(t) = C_i \int_1^t \frac{(t-d)dt}{(t-h)(t-n)t} \qquad (2)$$

$$\frac{dw}{dt} = C_i \frac{t-d}{(t-h)(t-n)t} \qquad (3)$$

Обход точки S(t=h) против часовой стрелки при бесконечно малом дает значения C_1, т.е.

$$C_1 = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{(n-h) \cdot n}{n-d} \qquad (4)$$

Так как формулу эту нужно будет интегрировать, что *dw/dt* удобно будет разложить на элементарные дроби: $\frac{t-d}{t(t-h)(t-n)} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t-h} + \frac{A_3}{t-n}$

Постоянные A_1, A_2, A_3 определяется обычным способам (методом неопределенных коэффициентов)

$$t - d = A_1 \cdot (t-h)(t-n) + A_2 t(t-n) + A_3 t(t-h)$$

Откуда $A_1 = -\frac{d}{n \cdot h}$; $A_2 = +\frac{h-d}{h(h-n)}$; $A_3 = +\frac{n-d}{n(n-h}$

Таким образом

$$W(t) = \frac{q}{4\pi} \cdot \left\{ \ln \left(\left(\frac{t-n}{1-n} \right) \cdot \left(\frac{1}{t} \right)^{\gamma_1} \left(\frac{1-h}{t-h} \right)^{\gamma_2}{}_2 \right\} \qquad (5)$$

$$\text{где } \gamma_1 = \frac{d}{h} \cdot \frac{n-h}{n-d}; \gamma_2 = \frac{n}{h} \cdot \frac{h-d}{n-d}; \qquad (6)$$

Проверим выполнение граничных условий задачи.

В промежутке $\mathrm{BE}\ (-\infty < t < 0)$

$$JmW = Jm \left\{ \frac{q}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{t+n}{1-n} \right) \cdot e^{i\pi} \cdot \left(\frac{1}{t} \right)^{-i\pi\gamma_1} \left(\frac{1-h}{t+h} \right) e^{i\pi\gamma_2} \right] \right\} = 0$$

где $(1 - \gamma_1 - \gamma_2) = 0.$

В промежутке $SA(n < t < 1), JmW = 0, (t > n, t > h, t > 0)$.

Таким же точным образом не трудно убедится, что на линии SH (h<t<n)

$$Jm\omega = Jm\left\{\frac{q}{4\pi}\cdot\ln\left(\frac{n-1}{1-n}\right)\left(\frac{1}{t}\right)^{\gamma_1}\left(\frac{1-h}{t-h}\right)^{\gamma_2}\cdot \mathrm{e}^{i\pi}\right\} = \frac{q}{4}$$

Определенная с помощью (5) функция $w\ (t)$ всюду вне разрезе ЕДН аналитична.

Найдём теперь функцию Н.Е.Жуковского ω. Область изменения функции ω представляет собой двулистную поверхности. Ввиду сложности отображения этой поверхности в верхнюю полуплоскости $t(Jmt \geq 0)$ (рис.2.), применим для нашей задачи интегральную формулу Шварца $[4]$ для верхней полуплоскости.

$$F(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Jm\ F(\xi)d\xi}{\xi - t} \qquad (7)$$

Как известно, что функция $F(t)$ определяется с помощью известного решения задачи об определения функции комплекстно пременного в верхней полуплоскости по её заданный мнимой части.

Введем новую функцию, связанную с фунукциий Н.Е.Жуковского

$$\Omega(t) = \frac{\omega(t)}{\sqrt{t}} = \frac{ln\frac{v_0}{v}}{\sqrt{t}} + i\,\frac{\theta}{\sqrt{t}} \qquad (8)$$

Для нашего случая в промежутках: BE (-∞<ξ<0), DH (h< ξ<n), SA (n< ξ<1) мнимой части функции $\Omega(t)$ равна нулю, притом на участке $BE\ Jm\ \Omega$ меняется на $\mathrm{Re}\ \Omega$ и наоборот,

где $v = v_0(ln\frac{v_0}{v} = ln1 = 0)$. На участке $ED(0 < \xi < d)$ $Jm\Omega = -\frac{\pi}{\sqrt{\xi}}$, а на участках: $HS(h < \xi < n)$ и $AB(1 < \xi < \infty)\ Jm\Omega = \frac{\pi}{2\sqrt{\xi}}$.

Таким образом видоизмененной интеграл Шварца имеет вид:

$$\Omega(t) = \frac{\omega(t)}{\sqrt{t}} = -\int_0^d \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi - t)} + \frac{1}{2}\int_h^n \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi - t)} + \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi - t)}.$$

откуда $\omega(t) = ln\left\{\frac{\sqrt{t}+\sqrt{d}}{\sqrt{t}-\sqrt{d}}\right\}\cdot\left\{\frac{\sqrt{n}-\sqrt{t}}{\sqrt{n}+\sqrt{t}}\cdot\frac{\sqrt{h}+\sqrt{t}}{\sqrt{h}-\sqrt{t}}\cdot\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}\right\}^{1/2}$ $\qquad (9)$

$$\zeta(t) = \left\{\frac{\sqrt{t}+\sqrt{d}}{\sqrt{t}-\sqrt{d}}\right\} \cdot \left\{\frac{\sqrt{n}-\sqrt{t}}{\sqrt{n}+\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{h}+\sqrt{t}}{\sqrt{h}-\sqrt{t}} \cdot \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}\right\}^{1/2} \qquad (10)$$

$$\bar{\zeta}(t) = \left\{\frac{\sqrt{t}-\sqrt{d}}{\sqrt{t}+\sqrt{d}}\right\} \cdot \left\{\frac{\sqrt{n}+\sqrt{t}}{\sqrt{n}-\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{h}-\sqrt{t}}{\sqrt{h}+\sqrt{t}} \cdot \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\right\}^{1/2} \qquad (11)$$

Проверим выполнение граничных условий или, что одно и тоже соответсвие (11) с рис. 1 и 2.

$$\bar{\zeta}_A(1) = \begin{Bmatrix} v = 0 \\ \theta = 0 \end{Bmatrix};\ \bar{\zeta}_B(\infty) = \begin{Bmatrix} v = v_0 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{Bmatrix};\ \bar{\zeta}_E(0) = \begin{Bmatrix} v = v_0 \\ \theta = -\pi \end{Bmatrix};$$

$$\bar{\zeta}_D(d) = \begin{Bmatrix} v = 0 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{Bmatrix};\ \bar{\zeta}_H(h) = \begin{Bmatrix} v = 0 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{Bmatrix};\ \bar{\zeta}_S(n) = \{v = \infty\}$$

Так как функция $\bar{\zeta} = \frac{d\omega}{(v_0 dz)}$ удовлетворяет граничным условиям и очевидно, голоморфна в любой точке верхней полуплоскости, то формула (11) решает задачу о конформным отображений $\bar{\zeta}$ (t) на верхнюю полуплоскость t.

Из формулы (3), (4) и (11) имеем

$$Z(t) = \frac{q}{4\pi v_0} \cdot \frac{n(n-h)}{n-d} \int_1^t \zeta(t) \cdot \frac{(t-d)dt}{t(t-h)(t-n)} \qquad (11)$$

Полученные формулы (3), (10), (11) дают общее решение задачи в параметрической форме, а также позволяют найти наиболее интересную для данной задачи величину - число кавитации:

$$Q = \frac{v_0^2}{v_\infty^2} - 1 \qquad (12)$$

Скорость в точке S (источник) бесконечно, а в точке A равна нулю, следовательно для определения числа кавитация Q в нашем случае будем брать среднюю скорость набегающего невозмущенного потока ($v_{\text{ср}}$) в точке A (без пластинки). В виду того, что комплексный потенциал источника имеет вид:

$$W = \frac{q}{2\pi} \cdot \ln z, \text{ где } \frac{dw}{dz} = \frac{q}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} \qquad (13)$$

Таким образом искомая средняя скорость будет $\upsilon_{\text{ср}} = \frac{q}{2\pi} \cdot \frac{1}{L}$ (13), где $L = |SA|$ расстояние от источника до пластинки (рис.1).

$$L(t) = \frac{\text{C}_1}{\vartheta_0} \int_n^1 (t) \cdot \frac{(t-d)dt}{t(t-h)(t-n)} \qquad (14)$$

Следовательно, число кавитации, имеет вид:

$$Q = \left\{ \frac{n(n-h)}{2(n-d)} \cdot \int_n^1 \zeta(t) \frac{(t-d)dt}{t(t-h)(t-n)} \right\}^2 - 1 \qquad (15)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Туревич, М. И. Теория струй идеальной жидкости / М.И.Туревич. – М.: 1961.
2. Абдылдаев, М. Ю. Плоские задачи теории струй идеальной жидкости / М.Ю. Абдылдаев. – НАН КР Институт автоматики, «Илим», Бишкек.: 1999.
3. Хмельник, М. И. Струйное обтекание пластинки потоком источника, находящийся в вершине угла, охваченного двумя обрезками прямых / М.И. Хмельник. – М.:1964.
4. Бирхгоф, Г., Сарантанелло Э. Струи, следы и каверны издат / Г. Бирхгоф, Э. Сарантанелло. – М.: 1964.
5. Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В. Методы теории струй комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.:1973.