

УДК 510.5:004.312.46

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Аширбаев Б. Ы., Базаркул к.Н.
КГУСТА им. Н. Исанова, КГТУ им. И. Раззакова

Проектирование алгоритмического обеспечения систем энергосберегающего управления объектами с несколькими входами представляет собой сложную задачу. Это обусловлено большим числом возможных видов функций оптимального управления (ОУ), сложностью построения областей существования различных видов функций ОУ в пространстве компонентов массива исходных данных задачи управления вследствие его высокой размерности, необходимостью разработки большого числа алгоритмов для расчета параметров функций ОУ.

Поэтому важным является разработка алгоритмического обеспечения систем энергосберегающего управления на основе декомпозиции исходной системы.

Ключевые слова: энергосберегающее управления, медленные и быстрые движения, оптимальные траектории.

ЭНЕРГИЯНЫ ҮНӨМДӨӨЧҮ ОПТИМАЛДЫК БАШКАРУУНУ ТҮЗҮҮ МАСЕЛЕСИН ЧЫГАРУУ

Аширбаев Б. Ы., Базаркул к. Н.
Н. Исанов атындагы КМКТАУ, И. Раззаков атындагы КМТУ

Бир канча кирүү жолдору бар объектинин энергияны үнөмдөөчү оптималдык башкаруусун түзүү маселесинин чыгарылышынын алгоритмасын иштеп чыгуу татаал маселе болуп саналат. Бул оптималдык башкаруу функцияларынын мүмкүн болуучу түрлөрүнүн санынын көптүгү, берилгендердин мейкиндигинде izdelүүчү өзгөрмөлөрдүн абалдарынын жогорку өлчөмдөрү менен шартталган оптималдык башкаруу функцияларынын жашоо областтарын түзүүнүн татаалдыгы жана оптималдык башкаруу функцияларынын параметрлерин эсептөө үчүн көптөгөн сандагы алгоритмдерди иштеп чыгуу зарылдыгы менен шартталган.

Ошондуктан, izdelүүчү системаны декомпозициялоонун негизинде энергияны үнөмдөөчү оптималдык башкарууну түзүү маселесинин чыгарылышынын алгоритмасын иштеп чыгуу, маанилүү болуп эсептелет.

Баштапкы сөздөр: оптималдуу башкаруу, энергияны үнөмдөөчү башкаруу, жай жана тез кыймылдар, оптималдуу траекториялар.

SOLUTIONS TO THE PROBLEM OF CONSTRUCTING OPTIMAL ENERGY-SAVING CONTROL

Ashirbaev B.Y., Bazarkul k N

KGUSTA named after N. Isanov, KSTU named after I. Razzakov

Designing algorithmic support for energy-saving control systems for objects with multiple inputs is a difficult task. This is due to the large number of possible types of optimal control functions, the complexity of constructing the regions of existence of various types of optimal control functions in the space of the components of the initial data array of the control problem due to its high dimension, the need to develop a large number of algorithms for calculating the parameters of the optimal control functions.

Therefore, it is important to develop algorithmic support for energy-saving control systems based on the decomposition of the original system.

Key words: energy-saving controls, slow and fast movements, optimal trajectories.

Введение. Одной из важнейших проблем человечества является экономия энергоресурсов. В связи с ростом цен на электроэнергию и топливно-энергетическими ресурсами, усилением конкурентной борьбы между фирмами, производящими энергоемкое оборудование, транспортные средства и другие машины, а также учитывая сложность социально-экономической обстановки, актуальность задач экономии и рационального использования энергоресурсов с каждым годом возрастает [1,2]. Энергосбережение стало одним из приоритетных направлений технической политики во всех развитых странах мира. Это связано, во-первых, с ограниченностью и невозобновляемостью основных энергоресурсов, во-вторых, с непрерывно возрастающими сложностями их добычи и стоимостью, в-третьих, с глобальными экологическими проблемами, обозначившимися на рубеже тысячелетий.

В связи с этим последнее время в классической теории автоматического и оптимального управления заметно возрос интерес к задачам анализа и синтеза энергосберегающего управления.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу

$$\dot{y}(t, \mu) = A(\mu)y(t, \mu) + B(\mu)u(t), \quad (1)$$

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \frac{a_{21}}{\mu} & \frac{a_{22}}{\mu} \end{pmatrix}, y(t, \mu) = (x(t, \mu), z(t, \mu))^T, B(\mu) = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & \frac{b_2}{\mu} \end{pmatrix},$$

$$y(t_0) = (x^0, z^0)^T \rightarrow y(t_k) = (x^k, z^k)^T,$$

$$I_3 = \int_{t_0}^{t_1} u^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (2)$$

В задаче (1), (2): $A(\mu)$, $B(\mu)$ -матрицы параметров модели динамики, $x(t, \mu)$ и $z(t, \mu)$ – медленные и быстрые переменные состояния системы (1), т.е. x и z – применительно к тепловым объектам обычно рассматривается как усредненная температура нагреваемого (охлаждаемого) тела и скорость изменения температуры соответственно. $u(t)$ -управляющая функция, для объектов управления с электронагревом, а также машин с электроприводом управление u обычно представляет собой электрическое напряжение или силу тока, для других объектов это может быть расход сжигаемого топлива или теплоносителя. I_3 – минимизируемый функционал (затраты энергии); μ – малый положительный параметр определяющий темпы изменения скорости температуры, $0 < \mu < 1$, $t \in [t_0, t_k]$, t_0, t_k – начало и конец временного интервала управления.

Задача (1), (2) представляет собой задач оптимального управления с ограничением на управление, фиксированным временным интервалом и закрепленными концами траектории изменения вектора фазовых координат. Такого рода задачи типичны для управления динамическими режимами тепловых процессов в химической, металлургической, машиностроительной, нефтеперерабатывающей, нефтехимической, строительной, пищевой и других отраслях промышленности [1 -3].

Построение оптимального энергосберегающего управления.

Рассмотрим задачу при $t \in [0,1]$. Систему (1) перепишем в виде

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}z + b_1u, \quad (3)$$

$$\mu \dot{z} = a_{21}x + a_{22}z + b_2u \quad (4)$$

Граничные условия системы (3), (4) имеют вид:

$$x(0) = x^0, z(0) = z^0, \quad (5)$$

$$x(1) = x^k, z(1) = z^k. \quad (6)$$

При $\mu = 0$ из (3) и (4) получаем:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{a}_1 \bar{x} + \bar{b}_1 u, \quad \bar{z} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} \bar{x} - \frac{b_2}{a_{22}} u. \quad (7)$$

где $\bar{a}_1 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{22}}$, $\bar{b}_1 = b_1 - \frac{b_2}{a_{22}}$.

С помощью замены [4]

$$z = \tilde{z} + Px \quad (8)$$

и с учетом (7) из (3) и (4) получим:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{a}_1 \bar{x} + \bar{b}_1 u, \quad (9)$$

$$\mu \dot{\tilde{z}} = \tilde{a}_2 \tilde{z} + \tilde{b}_2 u. \quad (10)$$

где $\tilde{a}_2 = a_{22} - \mu P a_{12}$, $\tilde{b}_2 = b_2 - \mu P b_1$, параметр P определяется из уравнения

$$\mu a_{12} P^2 + (\mu a_{11} - a_{22}) P - a_{21} = 0 \quad (11)$$

Система (9), (10) является системой с разделенными переменными состояния и они объединяются управляющей функцией $u(t)$. Эта система аппроксимирует исходную систему (3), (4) с точностью порядка малости μ .

Граничные условия системы (9), (10) записываются в виде:

$$\bar{x}(0) = x^0, \tilde{z}(0) = z^0 - P x^0, \quad (12)$$

$$\bar{x}(1) = x^k, \tilde{z}(1) = z^k - P x^k. \quad (13)$$

Решения уравнения (9), (10) с начальными условиями (12) имеют вид:

$$\bar{x}(t) = \exp(\bar{a}_1 t) x^0 + \bar{b}_1 \int_0^t \exp(\bar{a}_1 (t-s)) u(s) ds, \quad (14)$$

$$\tilde{z}(t, \mu) = \exp\left(\frac{\tilde{a}_2 t}{\mu}\right) (z^0 - P x^0) + \frac{\tilde{b}_2}{\mu} \int_0^t \exp\left(\frac{\tilde{a}_2 (t-s)}{\mu}\right) u(s) ds. \quad (15)$$

При $t=1$ с учетом конечных условий (13) из (14) и (15) имеем:

$$\int_0^1 \exp(\bar{a}_1(1-t)) u(t) dt = \alpha_1, \quad (16)$$

$$\int_0^1 \exp\left(\frac{\tilde{a}_2(1-t)}{\mu}\right) u(t) dt = \alpha_2, \quad (17)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{x^k - \exp(\bar{a}_1)x^0}{\bar{b}_1}, \alpha_2 = \frac{\left(z^k - Px^k - \exp\frac{\tilde{a}_2}{\mu}(z^0 - Px^0)\right)\mu}{\tilde{b}_2}. \quad (18)$$

Оптимальное энергосберегающее управление $u^*(t, \mu)$ удовлетворяющее соотношениям (16) - (18) и доставляющую минимум функционалу (2) определяется в форме [5]

$$u^*(t, \mu) = C_1 \exp(\bar{a}_1(1-t)) + C_2 \exp\left(\frac{\tilde{a}_2(1-t)}{\mu}\right) \quad (19)$$

где коэффициенты C_1, C_2 при выполнении условий $AD - B^2 \neq 0$ однозначно определяются из (16) - (18) в следующей форме:

$$C_1 = \frac{\alpha_1 D - \alpha_2 B}{AD - B^2}, C_2 = \frac{\alpha_2 A - \alpha_1 B}{AD - B^2}, A = -\frac{1 - \exp(2\bar{a}_1)}{2\bar{a}_1}, \quad (20)$$

$$B = -\frac{\mu}{\bar{a}_1\mu + \tilde{a}_2} \left(1 - \exp\left(\bar{a}_1 + \frac{\tilde{a}_2}{\mu}\right)\right), D = -\frac{\mu}{2\tilde{a}_2} \left(1 - \exp\left(\frac{2\tilde{a}_2}{\mu}\right)\right).$$

Переменные состояния $\bar{x}(t, \mu)$ и $\tilde{z}(t, \mu)$ описывающие медленные и быстрые движения соответственно определяются функциями:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) = & \exp(\bar{a}_1 t) + \frac{C_1 \bar{b}_1 \exp(\bar{a}_1(t+1))(1 - \exp(-2\bar{a}_1 t))}{2\bar{a}_1} + \\ & + \frac{C_2 \bar{b}_1 \exp\left(\bar{a}_1 t + \frac{\tilde{a}_2}{\mu}\right) \left(1 - \exp\left(-\left(\bar{a}_1 + \frac{\tilde{a}_2}{\mu}\right)t\right)\right)}{\bar{a}_1 + \frac{\tilde{a}_2}{\mu}}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{z}(t, \mu) = & \exp\left(\frac{\tilde{a}_2 t}{\mu}\right) (z^0 - Px^0) + \frac{C_1 \exp\left(\bar{a}_1 + \frac{\tilde{a}_2 t}{\mu}\right) \left(1 - \exp\left(\bar{a}_1 + \frac{\tilde{a}_2}{\mu}\right)t\right)}{\bar{a}_1 + \frac{\tilde{a}_2}{\mu}} + \\ & + \frac{C_2 \mu \exp\left(\frac{\tilde{a}_2(t+1)}{\mu}\right) \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{2\tilde{a}_2 t}{\mu}\right)\right)\right)}{2\tilde{a}_2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Пример. Объект управления описывается дифференциальным уравнением

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx}{dt} + x = qu, \quad (23)$$

Данное уравнение характеризует объект, состоящий из двух последовательно соединенных инерционных звеньев. Подобным уравнением приближенно описываются многие объекты управления: двигатели постоянного тока, управляемые генераторами, магнитными усилителями; маломощные двигатели переменного тока, управляемые магнитными усилителями; теплообменники и т.д.

В уравнении (23) $T_1 T_2 = \frac{J}{g}$, $T_1 + T_2 = \frac{k_1 k_2}{Rg}$, $q = \frac{k_1}{Rg}$ – коэффициент усиления, x – угол поворота выходного вала двигателя, J – момент инерции ротора, g – коэффициент вязкого трения, k_1 – постоянная вращающего момента, k_2 – постоянная противоэлектродвижущей силы (ЭДС), R – сопротивление ротора, u – электрическое напряжение.

Требуется найти алгоритм управления, переводящий объект описываемый уравнением (23) из положения

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 \quad (24)$$

в положение

$$x(t_1) = x_n, \dot{x}(t_1) = 0 \quad (25)$$

и доставляющий минимум интеграла

$$I_3 = \int_0^{t_1} u^2(t) dt. \quad (26)$$

Как выше отмечено интеграл I_3 – оценивает затраты энергии в процессе управления, тогда $u(t)$ – является энергосберегающим оптимальным управлением. Перепишем уравнение (23) в виде

$$\mu \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = qu(t), \quad (27)$$

где $T_1 T_2 = \mu$ – малый положительный параметр, $T_1 + T_2 \approx 1$.

Введем замены: $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$. Тогда уравнение (27) запишем в виде системы

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \mu \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) + qu(t). \quad (28)$$

Граничные условия системы (28) записываются в виде

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0 \quad (29)$$

$$x_1(t_1) = x_n, x_2(t_1) = 0 \quad (30)$$

При $\mu = 0$ из (28) получаем:

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{x}_2(t) = -\bar{x}_1(t) + qu(t). \quad (31)$$

С помощью замены

$$x_2(t) = \tilde{x}_2(t) + p(t)x_1(t) \quad (32)$$

и с учетом (31) имеем

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = -\bar{x}_1(t) + qu(t), \quad (33)$$

$$\mu \dot{\tilde{x}}_2(t) = -(\mu + 1)\tilde{x}_2(t) + qu(t). \quad (34)$$

$p(t)$ из (32) является решением уравнения

$$\mu p(t) + (\mu + 1)p(t) + 1 = 0. \quad (35)$$

Система (33), (34) является системой с разделенными переменными состояния и они объединяются управляющей функцией $u(t)$. Эта система аппроксимирует исходную систему (28) с точностью порядка малости μ .

Граничные условия системы (33), (34) записываются в виде:

$$\bar{x}_1(0) = 0, \quad \tilde{x}_2(0) = x_2(0) + p(0)x_1(0), \quad (36)$$

$$\bar{x}_1(t_1) = x_n, \quad \tilde{x}_2(t_1) = x_2(t_1) + p(t_1)x_1(t_1), \quad (37)$$

Решения уравнения (33), (34) с начальными условиями (36) имеют вид:

$$\bar{x}_1(t) = \exp(-t) \bar{x}_1(0) + q \int_0^t \exp(-(t-s)) u(s) ds, \quad (38)$$

$$\tilde{x}_2(t, \mu) = \exp\left(-\frac{(\mu+1)t}{\mu}\right) \tilde{x}_2(0) + \frac{q}{\mu} \int_0^t \exp\left(-\frac{(\mu+1)(t-s)}{\mu}\right) u(s) ds. \quad (39)$$

При $t = t_1$ с учетом условий (37) из (38) и (39) имеем:

$$\int_0^{t_1} \exp(-(t_1-t)) u(t) dt = \alpha, \quad (40)$$

$$\int_0^{t_1} \exp\left(-\frac{(\mu+1)(t_1-t)}{\mu}\right) u(t) dt = \gamma, \quad (41)$$

где

$$\alpha = \frac{x_n}{q}, \quad \gamma = \frac{\mu}{q} \left(\tilde{x}_2(t_1) - \exp\left(-\frac{(\mu+1)t_1}{\mu}\right) \tilde{x}_2(0) \right). \quad (42)$$

Энергосберегающее оптимальное управление $u^*(t, \mu)$ удовлетворяющее соотношениям (40), (41) и доставляющую минимум функционалу (26) определяется в форме

$$u^*(t, \mu) = C_1 \exp(t - t_1) + C_2 \exp\left(\frac{(\mu+1)(t-t_1)}{\mu}\right), \quad (43)$$

где $C = (C_1 \ C_2)'$ является решением уравнения.

$$W \cdot C = \alpha_M, \quad (44)$$

здесь

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$W_1(t) = \int_0^{t_1} \exp(2(s-t)) ds,$$

$$W_2(t, \mu) = \int_0^{t_1} \exp((s-t)) \exp\left(\frac{(\mu+1)(s-t)}{\mu}\right) ds,$$

$$W_3(t, \mu) = \int_0^{t_1} \exp\left(\frac{2(\mu+1)(s-t)}{\mu}\right) ds.$$

Переменные состояния $\bar{x}_1(t, \mu)$ и $\tilde{x}_2(t, \mu)$ описывающие медленные и быстрые движения соответственно определяются функциями:

$$\bar{x}_1(t, \mu) = \exp(-t) \bar{x}_1(0) + q((W_1(t) + W_2(t, \mu))), \quad (46)$$

$$\tilde{x}_2(t, \mu) = \exp\left(-\frac{(\mu+1)t}{\mu}\right) \tilde{x}_2(0) + \frac{q}{\mu} (W_2(t, \mu) + W_3(t, \mu)). \quad (47)$$

Численный расчет задачи. Пусть объект управления (23) характеризуется следующими параметрами [6]:

Сопротивление ротора	$R = 1 \text{ Ом.}$
Индуктивность ротора	L – незначительная.
Постоянная вращающего момента	$k_1 = 0,345 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}}.$
Постоянная против ЭДС	$k_2 = 0,367 \frac{\text{В}}{\text{рад}\cdot\text{с}^{-1}}.$
Момент инерции ротора	$J = 1,41 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$
Коэффициент вязкого трения	$g = 0,25 \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{рад}\cdot\text{с}^{-1}}.$
Период квантования	$\mu = 0,5 \text{ с.}$
Напряжения	$u = 220 \text{ в.}$

Начальные и конечные моменты времени $t_0 = 0 \text{ с, } t_1 = 60 \text{ с,}$

Все параметры даны в системе единиц СИ и согласованы друг с другом. Решения уравнения (35) имеет вид

$$p(t, \mu) = \left(-\frac{1}{\mu+1} \exp\left(\frac{1}{\mu+1}\right) t + C \right) \exp\left(-\frac{1}{\mu+1}\right) t. \quad (48)$$

Находим из (45) $W_1(60) = 0,5(1 - \exp(-2)60) = 0,31606$,

$$W_2(60) = \frac{\mu}{2\mu+1} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\mu}{2\mu+1}\right) 60 \right) = 0,25,$$

$$W_3(60) = \frac{\mu}{2(\mu+1)} \left(1 - \exp\left(-\frac{2(\mu+1)}{\mu}\right) 60 \right) = 0,212819.$$

Тогда матрицы W и W^{-1} имеют вид:

$$W = \begin{pmatrix} 0,31606 & 0,25 \\ 0,25 & 0,212819 \end{pmatrix}, \quad W^{-1} = \begin{pmatrix} 44,6489 & -52,4540 \\ -52,4540 & 66,3229 \end{pmatrix}.$$

Теперь при $x_n = 500$ оборот в минуту, т.е. $x_n = \frac{500 \text{ рад}}{2\pi}$, имеем:

$$\bar{x}_1(0) = 0, \quad \tilde{x}_2(0) = x_2(0) + p(0)x_1(0) = 0,$$

$$\bar{x}_1(60) = x_n = \frac{500}{2\pi}, \quad \tilde{x}_2(60) = x_2(60) + p(60)x_1(60) = \frac{500\mu}{2(2\mu+1)\pi},$$

находим: $\alpha_M = (57.6941; 9.6157)^T$ и

$$C = (1.0e + 003 * 2.0716; 1.06e + 003 * (-2.3885))^T.$$

Энергосберегающее оптимальное управление $u^*(t, \mu)$ удовлетворяющее соотношениям (40), (41) и доставляющую минимум функционалу (26) определяется из (43) (Рис.1).

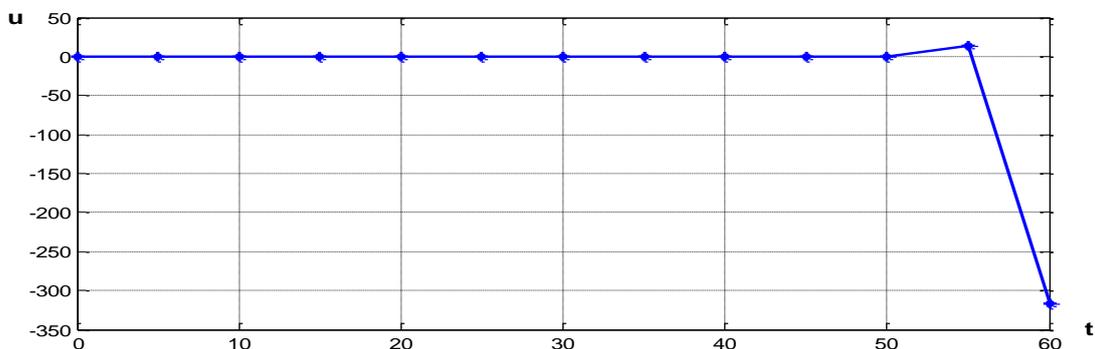


Рис.1. Энергосберегающее оптимальное управление $u^*(t, \mu)$.

Оптимальные траектории $\bar{x}_1(t, \mu)$ и $\tilde{x}_2(t, \mu)$ описывающие медленные и быстрые движения соответственно определяются функциями (46) и (47) (Рис.2).

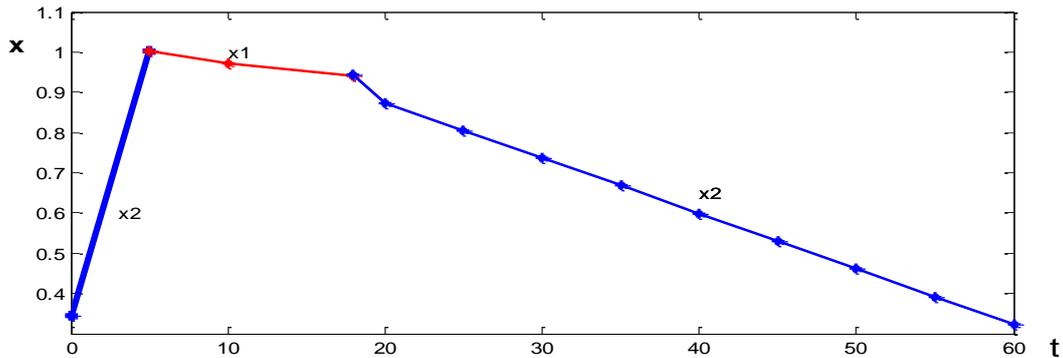


Рис.2. Оптимальная траектория $x(t, \mu)$ соответствующее энергосберегающему оптимальному управлению $u^*(t, \mu)$.

Заключение. Оптимальная траектория $x(t, \mu)$ состоит из трех составляющих первое из них $\bar{x}_1(t, \mu)$ формирует «магистраль», остальные две пограничные функции: $\tilde{x}_2(t, \mu)$ описывают переходы от начального состояния на магистраль и с магистрали в конечное состояние.

Декомпозиция исходной системы на медленные и быстрые подсистемы позволило:

- разработать алгоритм построения оптимального энергосберегающего управления исходной системы;
- определить переменные состояния, определяющие усредненной температуры нагреваемого (охлаждаемого) тела и скорость изменения температуры исследуемой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рэй Д. Экономия энергии в промышленности /Д Рэй; пер. с англ. – М., 1985. – 212 с.
2. Groshov V. N. Энергосберегающее управление нагревом жидкости /В. Н. Groshov С.В. Артемова, Д. Ю. Муромцев, Л. П. Орлова //Техника в сельском хозяйстве, 1996, №2. - С. 27-28.
3. Муромцев Ю.Л. Методология полного анализа энергосберегающего управления многомерными объектами /Ю.Л. Муромцев. Системы

- управления и информационные технологии. - 2008. - №2.3 (32). – С. 364 – 369.
4. Иманалиев З.К. Разделение движений в управляемых системах с сингулярными возмущениями /З.К. Иманалиев, Б.Ы. Аширбаев, Ж.Т. Баракова //Известия КГТУ им. И.Раззакова. – 2006. – Бишкек, №8. С. 75 – 79.
 5. Иманалиев З.К. Управление с минимальной нормой в сингулярно-возмущенной системе с фиксированными конечными состояниями //З.К. Иманалиев, Б.Ы. Аширбаев, Ж.Т. Баракова //Исслед. По интегро-дифференц. уравнениям. – 2004. – Бишкек: Илим. -Вып.33. – С. 175 – 188.
 6. Ловчаков В.И. Б.В.Сухинин, В.В. Сурков. Оптимальное управление электротехническими объектами /Б.В.Сухинин, В.В. Сурков.- Тула. Изд-во ТулГУ, 2004. – 149 с.