УДК 532

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДВУМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Чечейбаев Б., Эстебесова Н.Т.
КНУ им. Ж. Баласагына

Найдены точные аналитические решения уравнения гидродинамического пограничного слоя нестационарного течения несжимаемой вязкой жидкости выведенное относительно функции тока, являющегося дифференциальным уравнением в частных производных третьего порядка. Определены функции тока, распределение поля скоростей и линий тока, описывающие нестационарных течений при обтекании плоской пластинки. Найдено точное решение, описывающий истечение нестационарной струи из узкой длинной щели.

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение гидродинамического пограничного слоя; функция тока; линии тока; вязкая несжимаемая жидкость; профиль скорости.

ЭКИ ӨЛЧӨМДҮҮ СТАЦИОНАРДУУ ЭМЕС ГИДРОДИНАМИКАЛЫК ЧЕКТИК КАТМАР ТEҢДЕМЕСИНИН ТАК ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ

Чечейбаев Б., Эстебесова Н.Т.
Ж. Баласагын атындагы КУУ

Кысылбоочу, илээшкектүү суюктуктардын агымдарынын стационардуу эмес чектик катмары үчүн ток функциясына карата туюндурулган жекече туундулуу үчүнчү тартиптеги дифференциалдык теңдеменин так чыгарылыштары табылды. Жалпак пластинканы айланып өтүүчү стационардык эмес агымдардын ток функциясы, ылдамдыктардын бөлүштүрүлүшү жана ток сызыктарынын теңдемелери аныкталды. Узун, ичке жылчыктан агып чыгуучу стационардуу эмес агымдын чыгарылышы аныкталды.

Баштапкы сөздөр: Гидродинамикалык чектик катмардын дифференциалдык теңдемеси; ток функциясы; ток сызыктары; илээшкектүү кысылбоочу суюктук; ылдамдыктын профили.

EXACT SOLUTIONS OF THE EQUATION OF A TWO-DIMENSIONAL UNSTEADY HYDRODYNAMIC BOUNDARY LAYER

Checheibaev B., Estebesova N.
KNU named after J. Balasagyn

Exact analytical solutions of the equation of the hydrodynamic boundary layer of the unsteady flow of an incompressible viscous fluid derived with respect to the function of the current, which is partial differential equations of the third order, are found. The functions of the current, the distribution of the velocity field, and current lines describing unsteady flows during the flow of a flat plate are determined. An exact solution describing the outflow of a non-stationary jet from a narrow long slit has been found.
Key words: Differential equation of the hydrodynamic boundary layer; current function; current lines; viscous incompressible fluid; velocity profile.

Система уравнений Прандтля для нестационарного гидродинамического пограничного слоя плоской задачи введением функции тока $w(x,y,t)$ сводится к нелинейному дифференциальному уравнению третьего порядка представляемое в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}, \tag{1}$$

где ν- кинематическая вязкость жидкости.

Этим уравнением описывается гидродинамический пограничный слой на плоской пластине.

Составляющие вектора скорости u и v течения вязкой несжимаемой жидкости выражаются через функции тока следующим образом:

$$u=\frac{\partial w}{\partial y}, \quad v=-\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{2}$$

Начальные и граничные условия для уравнения (1) определяются условием прилипания на стенке, следовательно, должно быть

$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ на стенке.

В момент времени t=0 должно быть задано распределение скорости $u = \frac{\partial w}{\partial y}$ во всём пространстве.

Рассмотрим точные решения уравнения (1) линейное по переменной x:

$$w(x, y, t) = xF(y, t) + G(y, t), \tag{3}$$

где $F(y, t)$и $G(y, t)$ определяются из более простых уравнений с двумя переменными

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - F\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} - F\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 G}{\partial y^3}. \tag{5}$$

Уравнение (4) решается независимо от уравнения (5).

Если известно частное решение уравнения (4), то соответствующее уравнение (5) заменой $U = \frac{\partial G}{\partial y}$ приводится к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial U}{\partial t} - F\frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial y} U. \tag{6}$$

Введем новую переменную ξ и функцию $\tilde{u}(\xi, t)$

$$U(y, t) = \tilde{u}(\xi, t), \quad \xi = y + \lambda t, \ \ \lambda - const, \tag{7}$$

тогда уравнение (6) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + [F(\xi) - \lambda]\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - F'(\xi)\tilde{u}. \tag{8}$$

Будем определять решения уравнения (4).

Введем новую переменную $\xi = y + \lambda t, \ \ \lambda - const, \ \ F(y, t) = F(\xi)$.

Тогда относительно неизвестной функции $F(\xi)$ получается следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$\lambda \frac{d^2F}{d\xi^2} + \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2 - F\frac{d^2F}{d\xi^2} = \nu \frac{d^3F}{d\xi^3}. \qquad (9)$$

Для понижения порядка полученного дифференциального уравнения (9) введём новую функцию $P(F)$ следующим образом:

$$F'(\xi) = P(F). \qquad (10)$$

В результате относительно функции $P(F)$ получается следующее нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка.

$$\lambda \frac{dP}{d\tilde{F}} + P - F\frac{dP}{dF} = \nu \left\{\left(\frac{dP}{d\tilde{F}}\right)^2 + P\frac{d^2P}{d\tilde{F}^2}\right\}. \qquad (11)$$

Решение полученного дифференциального уравнения (11) отыскивается в виде многочлена следующего вида:

$$P(F) = \alpha F^2 + \beta F + \gamma, \qquad (12)$$

где α, β, γ- постоянные и методом неопределенных коэффициентов установлен их числовые значения:

$$\alpha = -\frac{1}{6\nu}, \qquad \beta = \frac{\lambda}{3\nu}, \qquad \gamma = -\frac{\lambda^2}{6\nu}. \qquad (13)$$

Решение дифференциального уравнения (11) найдено в следующем виде:

$$P(F) = -\frac{1}{6\nu}(F-\lambda)^2 \qquad (14)$$

Полагаем, что $F - \lambda = \tilde{F}$, тогда интегралом уравнения (10) является функция

$$\tilde{F} = \frac{6\nu}{\xi + C}\ , \qquad (15)$$

где С- постоянная интегрирования.

Окончательно в качестве решения уравнения (9) имеем:

$$F = \frac{6\nu}{y + \lambda t + C} + \lambda. \qquad (16)$$

Подставляя полученное решение (16) и введением новой переменной $\eta = \xi + \mathrm{C}$ в дифференциальное уравнение (8) преобразуем к следующему виду:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \frac{6\nu}{\eta}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \frac{6\nu}{\eta^2}\tilde{u}\,. \qquad (17)$$

В целях интегрирования уравнения (17), также введём новую искомую функцию $\tilde{v}(\eta, \tau)$ и переменную τ следующим образом:

$$\tilde{u}(\eta, \tau) = \eta^{\lambda}\tilde{v}(\eta, \tau), \;\; \tau = \nu t, \qquad (18)$$

тогда рассматриваемое дифференциальное уравнение приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \eta^2} + (2\lambda + 6)\frac{1}{\eta}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\,. \qquad (19)$$

Решение полученного уравнения (19) ищем в виде

$$\tilde{v}(\eta) = A + B\eta^{n}, \qquad (20)$$

где A и B - постоянные коэффициенты, а n-показатель степени.

Подставляя предполагаемый вид решения в (19) находим, что

$n = -(5 + 2\lambda)$.

В результате имеем решение уравнения (19) в следующем виде

$$\tilde{v}(\tau) = A + B\eta^{-(5+2\lambda)}. \qquad (21)$$

Теперь решение рассматриваемого уравнения (19) ищется в следующем виде

$$\tilde{v}(\eta, \tau) = A + C \cdot B\tau + B\eta^2, \qquad (22)$$

здесь A, C, $B - const$ подлежащие к определению.

Аналогичным образом подставляя (22) в дифференциальное уравнение относительно $\tilde{v}(\eta, \tau)$ (19) находим значение постоянной C равное $\mathrm{C} = 2(2\lambda + 7)$.

Итак, получаем решение рассматриваемого уравнения в следующем виде

$$\tilde{v}(\eta,\tau) = A + 2(7+2\lambda)B\tau + B\eta^2. \qquad (23)$$

Далее решение уравнения (19) ищется так:

$$v(\eta,\tau) = A + BC\tau^2 + DB\tau\eta^2 + B\eta^4. \qquad (24)$$

Методом неопределенных коэффициентов приравнивается коэффициенты при переменных τ и η^2 тогда поучается, что

$$D = 8\lambda + 36, \qquad C = (2\lambda+7)\cdot D.$$

В этом случае согласно (22) решение имеет следующий вид

$$\tilde{v}(\eta,\tau) = A + 4B(2\lambda+7)(2\lambda+9)\tau^2 + 4B(2\lambda+9)\tau\eta^2 + B\eta^4, \qquad (25)$$

где A и B - произвольные постоянные.

Исходя из аналогии линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка встречающегося в задачах диффузионного пограничного слоя

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-2\beta}{x}\frac{\partial w}{\partial x} \qquad (26)$$

и его частного решения, найденного в виде

$$w(x,t) = A + Bt^{\beta-1}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), \qquad (27)$$

а также из сравнения рассматриваемым уравнением (19) полагаем, что

$$\beta = -\frac{1}{2}(2\lambda+5).$$

В этом случае решением уравнения (19) является следующее выражение

$$v(\tau,\eta) = A + B\tau^{-\frac{1}{2}(2\lambda+7)}\exp\left(-\frac{\eta^2}{4\tau}\right). \qquad (28)$$

Теперь в качестве решения уравнения (26) рассматриваем следующее выражение

$$w(x,t) = A + B\,\frac{x^{2\beta}}{t^{\beta+1}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right). \qquad (29)$$

Поступая аналогичным образом получим нижеследующего решения

$$v(\tau,\eta) = A + B\eta^{-(2\lambda+5)}\tau^{\frac{1}{2}(2\lambda+3)}\exp\left(-\frac{\eta^2}{4\tau}\right). \quad (30)$$

Осуществляя обратный переход согласно формулам преобразования функций и переменных (18), (7) и (3) определены выражения для функции тока $w(x, y, t)$ являющиеся точным аналитическим решением уравнения нестационарного пограничного слоя в течении вязкой несжимаемой жидкости.

1
$$w(x,y,t) = x\left(\frac{6\nu}{y+\lambda t+C} + \lambda\right) + \frac{A}{\lambda+1}(y+\lambda t+C)^{\lambda+1} - \frac{B}{\lambda+1}(y+\lambda t+C)^{-(\lambda+4)} + \tilde{\varphi}(t), \quad (31)$$

Где A,B - $const$, $\tilde{\varphi}(t)$ - произвольная функция зависящая от времени, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = +2$

2.
$$w(x,y,t) = x\left(\frac{6\nu}{y+\lambda t+C} + \lambda\right) + \frac{1}{\lambda+1}(y+\lambda t+C)^{\lambda+1}\{A + 2B\nu(7+2\nu)t\} + \frac{B}{\lambda+3}(y+\lambda t+C)^{\lambda+3}, \quad (32)$$

здесь λ принимает значение равное $\lambda = -2$.

3.
$$w(x,y,t) = x\left(\frac{6\nu}{y+\lambda t+C} + \lambda\right) + \frac{1}{\lambda+1}(y+\lambda t+C)^{\lambda+1}\{A + 4B(7+2\lambda)(2\lambda+9)\nu^2t^2\} + \frac{1}{\lambda+3}(y+\lambda t+C)^{\lambda+3}4B(2\lambda+9)\nu t + \frac{B}{\lambda+5}(y+\lambda t+C)^{\lambda+5} + \tilde{\varphi}(t), \quad (33)$$

где $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2$ и.т.д.

Рассмотрим решение, представленное выражением (31).

Полагаем, что $\alpha = -2$, тогда функция тока в этом случае имеет вид:

$$w(x,y,t) = 2x\left(\frac{3\nu}{y-2t+C} - 1\right) - \frac{A}{y-2t+C} - \frac{B}{2}\frac{1}{(y-2t+C)^2}. \qquad (34)$$

Принимая во внимание начальное и граничное условий определяем значение постоянной интегрирования Cи соотношение между коэффициентами A и B:

$$C = 3\nu, \qquad A = -\frac{B}{3\nu}. \qquad (35)$$

Составляющие вектора скорости, а также функция тока uи vимеют следующий вид

$$u = \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{(y-2t+3\nu)^2}\left(\frac{B}{6\nu} + 6\nu x\right) + \frac{B}{(y-2t+3\nu)^3}, \qquad (36)$$

$$v = -\frac{\partial w}{\partial x} = -2\left(\frac{3\nu}{y-2t+3\nu} - 1\right), \qquad (37)$$

$$w(x,y,t) = 2x\left(\frac{3\nu}{y-2t+3\nu} - 1\right) + \frac{B}{2}\frac{1}{y-2t+3\nu}\left(\frac{1}{3\nu} - \frac{1}{y-2t+3\nu}\right). \qquad (38)$$

Профиль продольной составляющей скорости выглядит следующим образом:

$$u = -\frac{1}{(y_0-2t+3\nu)^2}\left(\frac{B}{6\nu} + 6\nu x\right) + \frac{B}{(y_0-2t+3\nu)^3}, \qquad (39)$$

где B - произвольная постоянная, $y_0 - const$.

Известно, что линии тока нестационарных течений жидкости и газа удовлетворяют уравнению следующего вида

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = dt. \qquad (40)$$

Подставляя в уравнение (40) выражения для продольной и поперечной составляющей скорости u и v из формулы (36), (37), после интегрирования полученного дифференциального уравнения получим для построения графически линии тока следующую формулу представленное в параметрической форме:

$$x = -\frac{B}{2}\frac{1}{(y+6\nu-2t)}\left(\frac{1}{6\nu}+\frac{1}{y-2t+3\nu}\right),$$
$$y = 3\nu\ln|y-2t+3\nu| + 2t\,. \tag{41}$$

Аналогичным образом для случая $\lambda_2 = -3$ профиль скорости и линии тока определяются следующим образом:

$$u = -\frac{1}{(y-3t+2\nu)^2}\left(6\nu x+\frac{A}{2\nu}\right)+\frac{A}{(y-3t+2\nu)^3}, \tag{42}$$

здесь $C = 20$, $B = -\frac{A}{2\nu}$, $A -$ произвольная постоянная;

$$x = \frac{A}{6}\frac{1}{y+4\nu-3t}\left(-\frac{1}{\nu}+\frac{1}{(y-3t+2\nu)^2}\right),$$
$$y = 2\nu\ln|y-3t+2\nu| + 3t\,. \tag{43}$$

Рассмотрим теперь решение нестационарного гидродинамического пограничного слоя, найденного в виде (32).

В этом случае при $\lambda = -2$ функция тока и составляющие вектора скорости имеют следующий вид:

$$w(x,y,t) = x\left(\frac{6\nu}{y-2t+C}-2\right)-\frac{1}{y-2t+C}\{A+2B\nu(7+2\nu)t\}$$
$$+B(y-2t+C), \tag{44}$$

$$v = -\frac{\partial w}{\partial x} = -2\left(\frac{3\nu}{y-2t+C}-1\right), \tag{45}$$

$$u = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{(y-2t+C)^2}\{A+2B\nu(7+2\nu)t-6\nu x\}+B. \tag{46}$$

Учитывая начального и пограничного условий убеждаемся, что постоянная интегрирования имеет значение $C = 3\nu$, а коэффициенты A и B взаимосвязаны соотношением $A = 9\nu^2 B$.

Положение и форма профиля продольной составляющей скорости определяются согласно следующему выражению:

$$u = \frac{1}{(y_0 - 2t + 3\nu)^2}\{9\nu^2 B + 2B\nu(7 + 2\nu)t - 6\nu x\} + B. \qquad (47)$$

Подставляя соответствующих выражение для величинuиv из (45),(46) в уравнение линии тока (40) определяется уравнение линии тока в параметрической форме:

$$x = 3(2\nu x - 3\nu^2 B)\frac{1}{y - 2t + 3\nu} - B\nu(7 + 2\nu)t$$
$$- \frac{B}{2}\nu(7 + 2\nu)(y + 3\nu)\ln|y - 2t + 3\nu|, \qquad (48)$$

$$y = 3\nu \ln|y - 2t + 3\nu| + 2t.$$

Найденное решение (33) при $\lambda = -2$ преобразуется к следующему виду:

$$w(x, y, t) = 2x\left(\frac{3\nu}{y - 2t + C} - 1\right) - \frac{1}{y - 2t + C}\{A + 60B\nu^2 t^2\}$$
$$+ (y - 2t + C)20B\nu t + \frac{B}{3}(y - 2t + C)^3 + \tilde{\varphi}(t), \qquad (49)$$

где A и B постоянные коэффициенты, $\tilde{\varphi}(t)$- произвольная функция от времени t.

Продольная и поперечная компоненты вектора скорости соответствующее решению (49) имеют следующий вид:

$$v = -\frac{\partial w}{\partial x} = -2\left(\frac{3\nu}{y - 2t + C} - 1\right), \qquad (50)$$

$$u = \frac{\partial w}{\partial y} = \{A + 60B\nu^2 t^2 - 6\nu x\}\frac{1}{(y - 2t + C)^2} + 20B\nu t$$
$$+ B(y - 2t + C)^2 \qquad (51)$$

Согласно начальному и граничным условию имеем $C = 3\nu$, $A = 27B\nu^4$ и функция тока в рассматриваемом случае имеет вид:

$$w(x, y, t) = 2x\left(\frac{3\nu}{y - 2t + 3\nu} - 1\right) - \frac{1}{y - 2t + 3\nu}\{27B\nu^4 + 60B\nu^2 t^2\}$$
$$+ (y - 2t + 3\nu)20B\nu t + \frac{B}{3}(y - 2t + 3\nu)^3 + \tilde{\varphi}(t). \qquad (52)$$

В рассматриваемом случае линии тока определяются следующим выражением

$$x = \frac{1}{2}(27Bv^4 - 6vx)\frac{1}{y - 2t + 3v} - \frac{15}{2}Bv^2\left[(y - 2t + 3v) - 2(y + 3v)ln|y - 2t + 3v| - \frac{(y + 3v)^2}{y - 2t + 3v} + 10Bvt^2 + B((y + 3v)t - t^2)\right]; \quad (53)$$

$$y = 3vln|y - 2t + 3v| + 2t \quad (54)$$

Профиль скорости и линии тока, соответствующие найденным решениям строятся с использованием современного пакета прикладных программ Mathlab MathCAD. Найдено аналитическое точное решение содержащее произвольную функцию $\varphi(x,t)$

$$w(x,y,t) = 6vC_1x^{1/3}th\xi + \frac{\partial}{\partial t}\int \varphi(x,t)dx, \qquad \xi = -C_1\frac{y + \varphi(x,t)}{x^{\frac{2}{3}}}, \quad (55)$$

описывающее истечение нестационарной струи из узкой длинной щели где $\varphi(x,t)$- произвольная функция переменных x и t, C_1- произвольная постоянная.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя/ Шлихтинг Г. - М.: Наука, 1974. - 712 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа/ Лойцянский Л.Г. - М.: «Наука», 1960.
3. Полянин А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения /А.Д.Полянин, В.Ф.Зайцев. - М.: Физматлит, 2002. - 432 с.