УДК 532.546

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ ДАВЫДОВА ДЛЯ РАСЧЕТА ГРЯЗЕВЫХ ПАВОДКОВ

Чечейбаев А.Б., Бийбосунов Б.И.
Кыргызско-германский институт прикладной информатики,
Кыргызский государственный университет им. И.Арабаева

Предлагается вычислительный алгоритм метода крупных частиц Давыдова для прогнозирования динамики наводнений, вызванных селевыми потоками. В качестве модельного уравнения динамики наводнений используется механико-математическая модель американских ученых Р. Иверсона и Р. Денлингера.

Ключевые слова: наводнения, математическая модель, метод крупных частиц Давыдова, разностные схемы.

СУУ ТАШКЫНДАРЫНЫН ЭСЕПТӨӨДӨ ДАВЫДОВДУН ЧОН БӨЛҮКЧӨЛӨР ЫКМАСЫНЫН ЧЕКТҮҮ АЙЫРМАЛАРЫ

Чечейбаев А.Б., Бийбосунов Б.И.
Кыргыз-герман колдонмоо информатики институту,
И.Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети

Суу ташкындардын агымдарынын динамикасын божомолдоштуруу үчүн Давыдовдун чоң бөлүкчөлөр ыкмасынын чектүү айырмалары сунушталат. Америкалык окумуштуулар Р. Иверсондун жана Р. Денлингердин механика-математикалык модели суу ташкындарынын динамикасынын моделдик тендемеси катары колдонулат.

Баштапкы сөздөр**:** Суу ташкындарыр, математикалык модель, Давыдовдун чон бөлүкчөлөр ыкмасы, сандык айырмалар .

THE LARGE-PARTICLE METHOD TO PREDICT THE DEBRIS-LADEN FLASH FLOODS

Checheibaev A., Biibosunov B.
Kyrgyz-German Institute of Applied Informatics,
Kyrgyz State Univeristy named after I.Arabaev

The numerical algorithm of Davydov's Large-Particle Method has been proposed to predict dynamics of debris-laden flash floods. The mechanical and mathematical model of American scientists R. Iverson and R. Denlinger has been used as a model equation of the debris laden flash floods.

Keywords: the floods, mathematical model, Davydov's Large-Particle Method, the difference schemes.

Сели и паводки являются в горных странах одними из опасных природных катастрофических процессов, которые преимущественно происходят в весеннее и летнее время года. В результате схода селей и паводков, затапливаются дома, дворы и сараи жилых домов, сельскохозяйственные угодия, селевыми отложениями заполняются поливные арыки, временно перекрываются автодороги.

В связи с этим, является актуальным разработка и тестирование физико-математических моделей и разработка компьютерных программ для прогнозирования селевых процессов, возникающих на территории Кыргызской Республики и других стран Центральной Азии.

В данной статье предлагаются разностные схемы метода крупных частиц Давыдова для расчета динамики грязевых паводков на основе применения механико-математической модели, предложенной известными американскими учеными – гидрологом Р. Иверсоном и геофизиком Р. Делингером. Предложенная Р. Иверсоном и Р. Делингером механико-математическая модель для прогнозирования динамики селевых потоков и наводнений [1, 2, 6] предполагает, что сель ведет себя как смесь ньютоновской жидкости и кулоновских твердых частиц, взаимодействующих между собой.

Математическая модель для расчета динамики селей и наводнений состоит из усредненных по глубине селевого потока уравнений движения сплошной среды. Модель выражает законы сохранения массы и импульса для смеси кулоновских гранулированных твердых частиц и ньютоновской вязкой жидкости без существенной жидкостной турбулентности.

Математическая модель динамики грязевых наводнений, описываемых в рамках механико-математической модели Р. Иверсона и Р. Денлингера, состоит из следующих нелинейных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu}{\partial x}+\frac{\partial hv}{\partial y}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t}+\frac{\partial hu^2}{\partial x}+\frac{\partial huv}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(g_z\cdot h^2)=g_x h-s_f\cdot u\cdot\sqrt{u^2+v^2}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial hv}{\partial t}+\frac{\partial hvu}{\partial x}+\frac{\partial hv^2}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(g_z\cdot h^2)=g_y h-s_f\cdot v\cdot\sqrt{u^2+v^2} \qquad (3)$$

$h(x,y)$ – глубина селевого потока, $u(x,y)$ – составляющая скорости движения паводка по оси Ox, $v(x,y)$ – составляющая скорости потока по оси Oy; g_x, g_y, g_z – компоненты ускорения свободного падения, s_f - безразмерный коэффициент турбулентного напряжения.

Метод крупных частиц [3-5, 6 и др.], разработанный крупным советским и российским ученым-физиком Ю.М. Давыдовым, стал одним из мощных методов современного вычислительного эксперимента, с помощью которого решаются различные научно-технические задачи механики сплошных и сыпучих сред, физики плазмы и др., наряду с такими широко известными методами, как метод конечных элементов и метод конечных объемов.

Для решения нелинейной системы уравнений в частных производных (1)-(3) область интегрирования в декартовой системе координат покрывается неподвижной в пространстве эйлеровой сеткой.

Согласно классическому описанию действия метода крупных частиц, его алгоритм для расщепления системы (1)-(3) состоит из трех этапов.

Эйлеров этап. На данном этапе, аналогично описанию метода крупных частиц, приведенному в монографии [5], поле глубиныгрязевого паводка принимается замороженным и изменяются лишь величины, относящиеся к ячейке в целом. Тогда из уравнений (1)-(3) исходной системы откидываются конвективные члены, выражаемые математически с помощью оператора дивергенции - соответствующие эффектам перемещения. Из уравнения непрерывности (1) следует, что поле глубины селевого потока заморожено. Далее, исходная дифференциальная система (1) – (4) перепишется в виде

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(g_z \cdot h^2) = g_x h - s_f \cdot u \cdot \sqrt{u^2+v^2}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(g_z \cdot h^2) = g_y h - s_f \cdot v \cdot \sqrt{u^2+v^2} \qquad (5)$$

Аппроксимируя дифференциальные уравнения (4) - (5) конечными разностями, получаем явные разностные схемы первого порядка точности по времени и второго по пространству для ячейки с адресом (i,j) в момент времени $t = t^n$ на эйлеровом этапе:

$$h_{i,j}^n \cdot \frac{\tilde{u}_{i,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{h_{i+\frac{1}{2},j}^n \cdot h_{i+\frac{1}{2},j}^n \cdot (g_z)_{i+\frac{1}{2},j}^n - h_{i-\frac{1}{2},j}^n \cdot h_{i-\frac{1}{2},j}^n \cdot (g_z)_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} =$$

$$= (g_x)_{i,j}^n \cdot h_{i,j}^n - s_f \cdot u_{i,j}^n \cdot \sqrt{(u_{i,j}^n)^2 + (v_{i,j}^n)^2}, \qquad (6)$$

$$h_{i,j}^n \cdot \frac{\tilde{v}_{i,j}^n - v_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{h_{i,j+\frac{1}{2}}^n \cdot h_{i,j+\frac{1}{2}}^n \cdot (g_z)_{i,j+\frac{1}{2}}^n - h_{i,j-\frac{1}{2}}^n \cdot h_{i,j-\frac{1}{2}}^n \cdot (g_z)_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} =$$

$$= \left(g_y\right)_{i,j}^n \cdot h_{i,j}^n - s_f \cdot v_{i,j}^n \cdot \sqrt{(u_{i,j}^n)^2 + (v_{i,j}^n)^2} \qquad (7)$$

Таким образом, на эйлеровом этапе мы находим промежуточные значения скоростей $\tilde{u}_{i,j}^n$ и $\tilde{v}_{i,j}^n$ для потоков воды, содержащих грязь:

$$\tilde{u}_{i,j}^n = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{h_{i,j}^n} \cdot \frac{h_{i-\frac{1}{2},j}^n \cdot h_{i-\frac{1}{2},j}^n \cdot (g_z)_{i-\frac{1}{2},j}^n - h_{i+\frac{1}{2},j}^n \cdot h_{i+\frac{1}{2},j}^n \cdot (g_z)_{i+\frac{1}{2},j}^n}{2 \cdot \Delta x} + \qquad (8)$$

$$+ (g_x)_{i,j}^n \cdot h_{i,j}^n - s_f \cdot u_{i,j}^n \cdot \sqrt{(u_{i,j}^n)^2 + (v_{i,j}^n)^2},$$

$$\tilde{v}_{i,j}^{n} = v_{i,j}^{n} + \frac{\Delta t}{h_{i,j}^{n}} \cdot \frac{h_{i,j-\frac{1}{2}}^{n} \cdot h_{i,j-\frac{1}{2}}^{n} \cdot (g_z)_{i,j-\frac{1}{2}}^{n} - h_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} \cdot h_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} \cdot (g_z)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}}{2 \cdot \Delta y} + \tag{9}$$

$$+(g_y)_{i,j}^{n} \cdot h_{i,j}^{n} - s_f \cdot v_{i,j}^{n} \cdot \sqrt{(u_{i,j}^{n})^2 + (v_{i,j}^{n})^2},$$

где значения с дробными индексами, например, $(i + \frac{1}{2}, j)$ относятся к правым границам эйлеровых ячеек и могут быть определены с помощью формул первого порядка точности.

Лагранжев этап. На данном этапе мы вычисляем эффекты переноса, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю эйлерову сетку. Здесь находятся за время Δt «потоки массы» $\Delta \mathrm{M}^n$ через границы эйлеровых ячеек. Фактически «потоками массы» в нашем случае служат потоки объемов грязевой воды через границы эйлеровых ячеек.

Разностный аналог уравнения неразрывности (1) может быть записан в следующем виде:

$$h_{i,j}^{n+1} \cdot \Delta x \cdot \Delta y = h_{i,j}^{n} \cdot \Delta x \cdot \Delta y + \Delta \mathrm{M}_{i-\frac{1}{2},j}^{n} - \Delta \mathrm{M}_{i+\frac{1}{2},j}^{n} + \Delta \mathrm{M}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n} - \Delta \mathrm{M}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} \tag{10}$$

«Потоки масс» будут скалькулированы на лагранжевом этапе с помощью следующих разностных формул:

$$\begin{aligned} \Delta \mathrm{M}_{i-\frac{1}{2},j}^{n} &= \langle h_{i-\frac{1}{2},j}^{n} \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^{n} \rangle \cdot \Delta y \cdot \Delta t, \\ \Delta \mathrm{M}_{i+\frac{1}{2},j}^{n} &= \langle h_{i+\frac{1}{2},j}^{n} \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n} \rangle \cdot \Delta y \cdot \Delta t, \\ \Delta \mathrm{M}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n} &= \langle h_{i,j-\frac{1}{2}}^{n} \rangle \cdot \langle \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n} \rangle \cdot \Delta x \cdot \Delta t, \\ \Delta \mathrm{M}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} &= \langle h_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} \rangle \cdot \langle \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} \rangle \cdot \Delta x \cdot \Delta t, \end{aligned} \tag{11}$$

где «потоки масс» через границы эйлеровых ячеек могут быть рассчитаны с помощью формул первого или второго порядков точности по пространству [5, 6 и др.].

Приведем сначала формулы первого порядка точности для расчета, например, $\Delta \mathrm{M}_{i+\frac{1}{2},j}^{n}$ для правой границы эйлеровой прямоугольной ячейки.

Если $\tilde{u}_{i,j}^{n} + \tilde{u}_{i+1,j}^{n} > 0$, то $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n} = (\tilde{u}_{i,j}^{n} + \tilde{u}_{i+1,j}^{n})/2$, $h_{i+\frac{1}{2},j}^{n} = h_{i,j}^{n}$. (12)

Если $\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n > 0$, то $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n = \left(\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n\right)/2$, $h_{i+\frac{1}{2},j}^n = h_{i+1,j}^n$.

Заметим, что для вычисления потоков $\Delta\mathrm{M}^n$ можно также использовать и формулы второго порядка точности.

Если $\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n > 0$ и $\tilde{u}_{i+1/2,j}^n = \tilde{u}_{i,j}^n + (\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x})_{i,j}^n = \tilde{u}_{i,j}^n + \frac{\tilde{u}_{i+1,j}^n + \tilde{u}_{i-1,j}^n}{4} > 0$, то

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n = \tilde{u}_{i,j}^n + \frac{\tilde{u}_{i+1,j}^n + \tilde{u}_{i-1,j}^n}{4}, \quad h_{i+\frac{1}{2},j}^n = h_{i,j}^n + \frac{h_{i+1,j}^n + h_{i-1,j}^n}{4}. \tag{13}$$

Если $\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n < 0$ и $\tilde{u}_{i+1/2,j}^n = \tilde{u}_{i+1,j}^n - (\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x})_{i+1,j}^n = \tilde{u}_{i+1,j}^n - \frac{\tilde{u}_{i+2,j}^n + \tilde{u}_{i,j}^n}{4} < 0$,

то $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n = \tilde{u}_{i+1,j}^n - \frac{\tilde{u}_{i+2,j}^n + \tilde{u}_{i,j}^n}{4}$, $h_{i+\frac{1}{2},j}^n = h_{i+1,j}^n - \frac{h_{i+2,j}^n + h_{i,j}^n}{4}$.

В случае, если $\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n > 0$ и $\tilde{u}_{i+1/2,j}^n = \tilde{u}_{i,j}^n + (\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x})_{i,j}^n = \tilde{u}_{i,j}^n + \frac{\tilde{u}_{i+1,j}^n + \tilde{u}_{i-1,j}^n}{4} < 0$, то полагаем, что $\Delta\mathrm{M}_{i+\frac{1}{2},j}^n = 0$.

В дополнение отметим, что возможны и другие способы вычисления величин $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n$ $h_{i+\frac{1}{2},j}^n$, вытекающие из особенностей изучаемых течений, зависящих от физики и геометрии поверхностей течения.

Заключительный этап.

На данном этапе находятся окончательные значения глубины и скорости наводнения на фиксированной эйлеровой сетке в следующий итерационный момент времени $t = t^{n+1} = t^n + \Delta\mathrm{t}$.

Новые значения глубины потока определяются согласно следующему разностному соотношению:

$$h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n + \frac{\Delta\mathrm{M}_{i-\frac{1}{2},j}^n - \Delta\mathrm{M}_{i+\frac{1}{2},j}^n + \Delta\mathrm{M}_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \Delta\mathrm{M}_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x \cdot \Delta y} \tag{14}$$

Окончательные значения составляющих скорости водного потока вычисляются в соответствии со следующими разностными формулами:

$$u_{i,j}^{n+1} = \tilde{u}_{i,j}^n \cdot \frac{h_{i,j}^n}{h_{i,j}^{n+1}} + \frac{\sum_l \tilde{u}_l^n \cdot \Delta\mathrm{M}_l^n}{h_{i,j}^{n+1} \cdot \Delta x \cdot \Delta y}, \tag{15}$$

где

$$\sum_l \tilde{u}_l^n \cdot \Delta\mathrm{M}_l^n = \Delta\mathrm{M}_{i-\frac{1}{2},j}^n \tilde{u}_{i-1,j}^n - \Delta\mathrm{M}_{i+\frac{1}{2},j}^n \tilde{u}_{i+1,j}^n + \Delta\mathrm{M}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \tilde{u}_{i,j-1}^n - \Delta\mathrm{M}_{i,j+\frac{1}{2}}^n \tilde{u}_{i,j+1}^n.$$

$$v_{i,j}^{n+1} = \tilde{v}_{i,j}^{n} \cdot \frac{h_{i,j}^{n}}{h_{i,j}^{n+1}} + \frac{\sum_l \tilde{v}_l^n \cdot \Delta \mathrm{M}_l^n}{h_{i,j}^{n+1} \cdot \Delta x \cdot \Delta y}, \qquad (16)$$

где

$$\sum_l \tilde{v}_l^n \cdot \Delta \mathrm{M}_l^n = \Delta \mathrm{M}_{i-\frac{1}{2},j}^{n} \tilde{v}_{i-1,j}^{n} - \Delta \mathrm{M}_{i+\frac{1}{2},j}^{n} \tilde{v}_{i+1,j}^{n} + \Delta \mathrm{M}_{i,j-\frac{1}{2}}^{n} \tilde{v}_{i,j-1}^{n} - \Delta \mathrm{M}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} \tilde{v}_{i,j+1}^{n}.$$

Нетрудно доказать, что разностные схемы (14), (15) и (16) выражают законы сохранения массы и импульса на фиксированной эйлеровой сетке. Для этого величины, характеризующие физико-механические свойства наводнений (14), (15) и (16), разлагаются в ряд Тейлора относительно центра эйлеровых ячеек и производятся соответствующие алгебраические манипуляции. Нетрудно показать, что в целом разностные схемы метода крупных частиц являются дивергентно-консервативными.

Традиционно исходная система уравнений (1) – (3) дополняются начальными и граничными условиями. В начальный момент времени задаются распределения глубины и скоростей водного потока с грязью в области интегрирования. Граничными условиями могут служить условия свободного втекания (вытекания) и условия непротекания. Моделирование граничных условий в методе крупных частиц осуществляется с помощью методики фиктивных ячеек [3-5 и др.].

Таким образом, зная начальные параметры наводнения и граничные условия на границах области интегрирования, с помощью предложенного вычислительного алгоритма метода крупных частиц находятся значения физических параметров водного потока для каждого следующего момента времени.

Заметим, что как это принято в методе крупных частиц, решение стационарной задачи моделирования динамики наводнений находится в результате достижения процесса установления во времени исходной задачи, поставленной исходно в форме нестационарной проблемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Roger P. Denlinger, Richard M. Iverson. Flow of variably fluidized granular masses across three-dimensional terrain 2. Numerical predictions and experimental tests // Journal of Geophysical Research, Vol. 106, NO. B1, pp. 553-566, January 10, 2001.
2. Richard M. Iverson, Roger P. Denlinger. Mechanics of debris flows and debris laden flash floods // Proceedings of the Seventh Federal Interagency Sedimentation Conference, March 25 to 29, 2001, Reno, Nevada.
3. Ю.М. Давыдов. Крупных частиц метод. В кн.: Математическая энциклопедия. Т. 3. – Москва: Советская энциклопедия, 1982. – С. 125-129.
4. Yuri M. Davydov. Large-Particle Method. In.: Encyclopaedia of Mathematics, vol.5. -Dordrecht/Boston/London: Kluwer academic publishers, 1990, p.p. 358-360.
5. О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент – М.: Наука, 1982. – 391 с.
6. А. Б. Чечейбаев. Метод крупных частиц для расчета динамики селевых потоков по модели Иверсона и Денлингера. // Современные проблемы механики: гидрогазодинамика, геомеханика, геотехнологии и информатика. 2016 г. Вып. №24(2). – Бишкек: Институт геомеханики и освоения недр НАН КР, 2016. - С. 52-59.