УДК 519 + 004.94

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Абдиева Л.К., Садыкова Н.А., Таалайбекова М.
КГУСТА им. Н. Исанова, КНУ им Баласагына

В работе рассмотрены математическое модели интервальной задачи оптимизации, когда имеются неопределенности в параметрах задачи.

Ключевые слова: интервальный анализ, математические модели, математические методы, задачи оптимизации

БЕЛГИЛИКСИЗ ШАРТТАРДА ИНТЕРВАЛДЫК ОПТИМАЛАШТЫРУУ МАСЕЛЕСИН МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛДЕРҮҮ

Абдиева Л.К., Садыкова Н.А., Таалайбекова М.Т.
Н.Исанов ат. КМКТАУ, Баласагын ат КУУ

Макалада маселенин параметрлеринде белгисиздик болгондо интервалдык оптималдаштыруу маселесинин математикалык модели каралат.

Баштапкы сөздөр: интервалдык анализ, математикалык моделдер, математикалык методдор, оптималдаштыруу маселелери

MATHEMATICAL MODELING OF THE INTERVAL OPTIMIZATION PROBLEM UNDER UNCERTAINTY CONDITIONS

Abdieva L., Sadykova N.A., Taalaibekova M.
KSUCTA named of N. Isanova,
KNU named after J. Balasagyn

The paper considers a mathematical model of an interval optimization problem when there are uncertainties in the parameters of the problem.

Key words: interval analysis, mathematical models, mathematical methods, optimization problems

Во многих реальных ситуациях может быть недостаточно или вовсе не имеется информации о какой-либо вероятностной модели рассматриваемых факторов. К примеру, факторы могут не удовлетворять условиям однородности результатов испытаний, независимости величин, несмещенности и т.п. В постановках задач с такими факторами применяют интервальный подход, т.е. интервальное представление факторов. Такого рода постановки являются более адекватными практическим реалиям с меньшими ограничениями к их исходным данным.

Интервал – это замкнутый числовой промежуток. Принадлежность некоторому интервалу интересующей нас величины приводит к так называемой интервальной неопределённости – когда знания об интересующей нас величине неполны или даны частично. Математическая дисциплина, в которой изучают задачи с такого рода интервальными неопределённостями в данных и методы решения называется интервальным анализом [1].

Рассмотрим математическое моделирование задачи оптимизации в условиях неопределенности в факторах. Рассмотрим произвольную функцию n переменных

$$y = F(x_1, \dots, x_n), \quad (1.)$$

Пусть параметры - коэффициенты $p_k, k = \overline{1,l}$, определены не точно, заданы в виде интервалов возможных значений $\widetilde{p}_k = [p_{k1}, p_{k2}]$. Тогда полностью детерминированная функция F переходит в неполностью детерминированную интервальную функцию вида

$$\widetilde{y} = \widetilde{F}(x_1, \dots, x_n), \quad (2)$$

где интервальная функция F и интервальная выходная переменная y могут быть описаны в виде следующих интервалов

$$\widetilde{F}(x_1, \dots, x_n) = [F_1(x_1, \dots, x_n), F_2(x_1, \dots, x_n)], \quad \widetilde{y} = [y_1, y_2]. \text{ [13]} \qquad (3)$$

Добавив к функции (3) функции ограничений получают неполностью определенную интервальную задачу условной оптимизации:

$$\widetilde{F}(x_1,...,x_n) = \max \text{ при } \widetilde{\Phi}(x_1,...,x_n) \le \widetilde{b}_i, i = \overline{1,m} \}. \quad (4)$$

Решение данной интервальной задачи условной оптимизации (4) основывается на математической теории сравнения интервалов, выбора максимального и минимального интервала [1-3]. В частности, речь идет о следующих трех теоремах.

Пусть существуют два интервала $\widetilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\widetilde{b} = [b_1, b_2]$. Необходимо сравнить эти интервалы по величине, рассматривая их как интервальные числа.

Теорема 1. [1-2] Для того чтобы два интервала $\widetilde{a} = [a_1, a_2]$ и $\widetilde{b} = [b_1, b_2]$ были сравнимы по величине (отношению ≥) и находились в отношении $\widetilde{a} \ge \widetilde{b}$, необходимо и достаточно, чтобы границы этих интервалов подчинялись условиям $a_1 \ge b_1, \quad a_2 \ge b_2,$ (5)

а для того, чтобы они были сравнимы по величине (отношению ≤) и находились в отношении $\widetilde{a} \le \widetilde{b}$ необходимо и достаточно, чтобы границы этих интервалов подчинялись условиям $a_1 \le b_1, \quad a_2 \le b_2.$ (6)

Теорема 1 показывает, что интервалы a и b состоят в отношении $\widetilde{a} \ge \widetilde{b}$ только в том случае, когда a передвинут вправо относительно b двумя границами, состоят в отношении $\widetilde{a} \le \widetilde{b}$ только в том случае, когда a передвинут влево относительно b двумя границами. Т.е. данная теорема сравнение двух интервалов, а также отбор большого или меньшего интервала переводит к простому сравнению вещественных границ этих интервалов.

Теорема 2. [1-2] Для того чтобы в некоторой системе интервалов $\tilde{a}(1)=[a_1(1),a_2(1)]$, $\tilde{a}(2)=[a_1(2),a_2(2)],...$ существовал максимальный интервал (т.е. такой интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении ≥), необходимо и достаточно, чтобы границы этого интервала были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно следующим условиям

$$a_1(1)\geq a_1(2),\ a_1(1)\geq a_1(3),...,\ a_2(1)\geq a_2(2),\ a_2(1)\geq a_2(3),.... \qquad (7)$$

Теорема 3. [1-2] Для того, чтобы в некоторой системе интервалов $\tilde{a}(1)=[a_1(1),a_2(1)]$, $\tilde{a}(2)=[a_1(2),a_2(2)],...$ существовал минимальный интервал (т.е. такой интервал, который находится со всеми остальными интервалами в отношении ≤), необходимо и достаточно, чтобы границы этого интервала были расположены относительно одноименных границ всех остальных интервалов согласно условиям

$$a_1(1)\leq a_1(2),\ a_1(1)\leq a_1(3),...,\ a_2(1)\leq a_2(2),\ a_2(1)\leq a_2(3),.... \qquad (8)$$

<u>Теоремы 2 и 3</u> указывают, что среди множества имеющихся интервалов максимальным (минимальным) интервалом будет только в том случае, когда максимальны (минимальны) его нижняя граница – среди нижних границ всех интервалов – и его верхняя граница – среди верхних границ всех интервалов. Вышеуказанные условия максимальности (минимальности) интервала сводят решение задачи условной оптимизации целевой функции при наличии неопределенности к простым традиционным задачам условной оптимизации полностью определенной целевой функции.

Таким образом, в интервальной задаче условной оптимизации (4) интервальные целевая функция $\tilde{F}(x_1,...,x_n)$, функции $\tilde{\Phi}_i(x_1,...,x_n), i=\overline{1,n}$, можно написать в виде интервалов

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{F}(x_1,...,x_n)=[F_1(x_1,...,x_n),F_2(x_1,...,x_n)],\\
&\widetilde{\Phi}_i(x_1,...,x_n)=[\Phi_{i1}(x_1,...,x_n),\Phi_{i2}(x_1,...,x_n)],\ \ i=\overline{1,m},\\
&\widetilde{b}_i=[b_{i1},b_{i2}], \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=\overline{1,m}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Затем, задачу (9) можно переделать в явном виде

$$
\begin{aligned}
&[F_1(x_1,...,x_n),F_2(x_1,...,x_n)]=\max,\\
&[\Phi_{i1}(x_1,...,x_n),\Phi_{i2}(x_1,...,x_n)]\le[b_{i1},b_{i2}],\ \ i=\overline{1,m},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

которую можно решить традиционными методами [4-5] .

Согласно теореме 2 интервальное уравнение (10) можно разделить на эквивалентную пару простых детерминированных уравнений

$$F_1(x_1,...,x_n)=\max,\quad F_2(x_1,...,x_n)=\max\,. \tag{11}$$

Теперь согласно, теоремы 1 систему интервальных неравенств в (10) напишем в виде эквивалентной системы простых детерминированных неравенств

$$\Phi_{i1}(x_1,...,x_n)\le b_{i1},\ \ \Phi_{i2}(x_1,...,x_n)\le b_{i2},\quad i=\overline{1,m}\,. \tag{12}$$

Затем, объединив пару уравнений оптимизации (11) с системой неравенств-ограничений (12), получим две полностью определенные задачи условной оптимизации

$$F_1(x_1,...,x_n)=\max,\quad \left.\begin{aligned}&\Phi_{i1}(x_1,...,x_n)\le b_{i1},\, i=\overline{1,m},\\ &\Phi_{i2}(x_1,...,x_n)\le b_{i2},\, i=\overline{1,m},\end{aligned}\right\}\ , \tag{13}$$

$$F_2(x_1,...,x_n)=\max,\quad \left.\begin{aligned}&\Phi_{i1}(x_1,...,x_n)\le b_{i1},\, i=\overline{1,m},\\ &\Phi_{i2}(x_1,...,x_n)\le b_{i2},\, i=\overline{1,m}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

При этом задачу (13) называют нижней граничной задачей исходной интервальной задачи (10), а задачу (14) – ее верхней граничной задачей.

Таким образом получается, что пара детерминированных задач условной оптимизации (13), (14) будет равносильной первоначальной интервальной задаче условной оптимизации (10). Следовательно, найдя решение нижней (13) и верхней (14) граничных задач получим решения интервальной задачи условной оптимизации (10). Решение данных задач можно найти традиционными общеизвестными методами математического программирования [3-5].

Рассмотрим решение интервальной задачи на следующем примере:

Математическая постановка интервальной задачи оптимизации выпуска продукции

Пусть имеется некоторый экономический объект (фабрика, завод, фирма, цех и т.д.). Допустим, на этом объекте производится n - видов продукции. Продукция производится с использованием m - типов оборудования. Обозначим время обработки j-продукции на i-го оборудовании составляет a_{ij}. Через b_i обозначим ограниченный параметр - время использования i-го оборудования. Пусть известны расходы c_j на производство одной единицы j-той продукции, а также эффективность d_j использования одной единицы j-той продукции. Обозначим через x_j - планируемое количество производства j-той продукции. Необходимо составить план производства продукции X = $(x_1, x_2, ..., x_n)$, так чтобы себестоимость единицы продукции была минимальна [3,4].

Математическая модель такой задачи будет задачей дробно-линейного программирования, где необходимо найти минимум дробно-линейной целевой функции

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} \qquad (15)$$

при ограничениях также в виде линейных функций

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (j = \overline{1, n}), \quad x_j \ge 0 \qquad (16)$$

где параметры c_j, b_i, a_{ij}, d_j - некоторые постоянные положительные числа.

Положим в данной постановке задачи производится три вида изделия с применением трех типов оборудования. Известны расходы c_j на производство одной единицы продукции, время обработки продукции на оборудовании a_{ij}, время использования оборудования b_i, эффективность использования одной единицы продукции d_j в виде интервальных значений. Т.е. найти решение задачи оптимизации дробно-линейной целевой функции

$$F = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3}{d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3} \quad (17)$$

при линейных ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 300 \\ x_1 + 2x_2 \le 70 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 340 \end{cases}.$$

Разделим задачу на на верхнюю и нижнюю задачи. Нижняя целевая функция F1 будет получена подстановкой в коэффициенты числителя целевой функции верхних интервальных значений c_j, в коэффициенты знаменателя целевой функции нижних интервальных значений c_j.

Нижняя целевая функция

$$F_1 = \frac{8x_1 + 3x_2 + 2x_3}{3x_1 + 4x_2 + x_3} \quad (18)$$

с линейными ограничениями

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 300 \\ x_1 + 2x_2 \le 70 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 340 \end{cases} \quad (19)$$

Чтобы целевую функцию привести к линейному виду введем новую переменную

$$y_0 = \frac{1}{3x_1 + 4x_2 + x_3}$$

По формуле $y_i = x_i y_0$ найдем новые переменные y1, y2, y3.

В итоге всех этих подстановок, переобозначений и равносильных преобразований получим линейную целевую функцию:

$$F_1 = 8y_1 + 3y_2 + y_3 \tag{20}$$

с линейными ограничениями:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 - 300y_0 \le 0 \\ y_1 + y_3 - 70y_0 \le 0 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 - 340y_0 \le 0 \\ 3y_1 + 4y_2 + y_3 = 1 \\ y_i \ge 0 \end{cases} \tag{21}$$

Аналогично применяя подстановки и равносильные преобразования получим верхнюю задачу с линейной целевой функцией:

$$F_2 = \frac{9x_1 + 5x_2 + 3x_3}{} \tag{22}$$

с линейными ограничениями:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 - 300y_0 \le 0 \\ y_1 + y_3 - 70y_0 \le 0 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 - 340y_0 \le 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_i \ge 0 \end{cases} \tag{23}$$

Решение задачи состоит из объединения решений верхней и нижней задач, получено с применением компьютерной технологии – инструмента «Поиск решения» Excel.

Максимум целевой функции F достигается в интервале $F = [F_1, F_2] = [2{,}66; 9]$ при значениях переменных X= (70, 0, 0).

т.е. экономический смысл решения задачи следующий: нужно выпускать 70 единиц продукции 1-го вида, 2-го и 3-го видов нецелесообразно производить. При этом будет достигнут максимум эффективности выпускаемой продукции с оценкой в интервале Fmax = [2,66 ; 9].

Таким образом, методом интервального анализа можно переопределить интервальную задачу в условиях неопределенности к двум полностью определенным задачам линейного программирования, а затем найти решение этих задач традиционными общеизвестными методами, к примеру симплекс-методом с применением компьютерных технологий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. – Ижевск: НИЦ РХД,2007. – 468 с.

   2. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986. – 224 с

2. Левин В.И. Интервальная математика и исследование систем в условиях неопределенности – Пенза: Изд-во Пенз. технол. ин-та. – 1998. – 56 с.
3. Левин В. И., Немкова Е. А. Интервальная задача оптимизации себестоимости и эффективности продукции //Системы управления, связи и безопасности. 2016. №1. С.240-261
4. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод И. Высшая математика: Математическое программирование. Мн.: Вышэйшая школа, 2001.-351 с.