УДК 656.13

ПРИМЕНЕНИЕ MATHCAD ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТРАНСПОРТНОЙ ЛОГИСТИКИ

Аблабекова Ч. А., Алтымышева Ж. А., Бактыбекова К.Б.
КГУСТА им. Н. Исанова

В статье анализируется задача транспортной логистики. Приводится классификация по различным признакам, рассматриваются методы решения различных типов транспортных задач с применением математического пакета MathCad.

Ключевые слова**:** транспортная логистика, транспортная задача, математическое моделирование, математический пакет MathCad.

MATHCADДЫ КОЛДОНУП ТРАНСПОРТТУК ЛОГИСТИКАДАГЫ МАСЕЛЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУ

Аблабекова Ч.А., Алтымышева Ж.А., Бактыбекова К.Б.
Н.Исанов ат. КМКТАУ

Бул макалада транспорттук логистиканын маселелери иилденет. Ар кандай критерийлерге негизделген классификациялары берилген, MathCad математикалык пакетин колдонуу менен транспорттук маселелердин ар кандай түрлөрүн чечүү ыкмалары каралат.

Баштапкы сөздөр**:** транспорт логистикасы, транспорт маселеси, математикалык моделдөө, математикалык пакет Mathcad.

APPLICATION OF MATHCAD FOR SOLVING TRANSPORTATION LOGISTICS TASKS

Ablabekova Ch.A., Altymysheva Zh.A., Baktybekova K.B.
KSUCTA named of N. Isanov

In this article analyzed the problem of transport logistics. A classification based on various criteria is given, methods for solving various types of transport problems using the mathematical package MathCad are considered.

Key words**:** transport logistics, transport problem, mathematical modeling, mathematical package Mathcad

Ведение

Процессы распределения ресурсов и производства, анализа, управления и планирования должны определятся выбором оптимального решения в соответствии принятыми приоритетами и потребностями. Исследованием этих вопросов занимается логистика. Логистика направлена на минимизацию издержек и получение максимальной прибыли.

Целью транспортной логистики, как науки, является осуществление доставки товаров получателю с учетом шести основных правил логистики:

1. Груз - необходимый товар;
2. Качество - надлежащего качества.
3. Количество - в нужном количестве.
4. Время - доставленный в установленное время.
5. Место - в нужное место.
6. Затраты - с минимальными затратами.

Выбор оптимальных маршрутов движения транспортных средств с учетом различных факторов позволяет эффективно управлять грузопотоками, рационально использовать производительность транспортных средств, сократить, или, по крайней мере, не увеличивать транспортный парк и сократить расходы на его обслуживание. По различным оценкам с транспортными издержками связано от 30 до 50 % всех затрат на логистику. Информационные системы и логистика в строительстве средств при условии соблюдения сроков поставок позволяет не только минимизировать эксплуатационные затраты, но и в 1,5...2 раза сократить складские запасы. Этим обусловлена актуальность исследований, направленных на определение объемов грузоперевозок, количество единиц используемого транспорта, рационализацию маршрутов движения, сокращение суммарных затрат на транспортировку [1-5]. Решение оптимизационных задач транспортной логистики предполагает проведение глубокого анализа и учет значительного количества факторов, что невозможно без использования математического аппарата и информационных технологий. Авторы проанализировали известные математические методы, применяемые в логистике [4].

Основная часть

Основной задачей оптимизации в транспортной логистике является транспортная задача, которая позволяет найти оптимальный план грузоперевозок.

Транспортная задача — математическая задача линейного программирования специального вида о поиске оптимального распределения однородных объектов из аккумулятора к приемникам с минимизацией затрат на перемещение.

Классическая транспортная задача — это задача об оптимальном плане перевозок однородного продукта из однородных пунктов наличия в однородные пункты потребления на однородных транспортных средствах со статичными данными (это основные условия задачи). [5]

Под поставщиками и потребителями понимаются различные промышленные и сельскохозяйственные предприятия, заводы, фабрики, склады, магазины и т. д. Однородными считаются грузы, которые могут быть перевезены одним видом транспорта. Под стоимостью перевозок понимаются тарифы, расстояния, время, расход топлива и т.п.

Целью транспортной задачи является обеспечение доставки продукции потребителю в нужное время и место при минимально возможных совокупных затратах трудовых, материальных, финансовых ресурсов.

Цель считается достигнутой при выполнении шести условий:

1. нужный товар…
2. необходимого качества…
3. в необходимом количестве доставлен…
4. в нужное время…
5. в нужное место…
6. с минимальными затратами.

Рассмотрим постановку транспортной задачи на примере. Пусть некоторый однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах a_1 ,a_2 ,...,a_m. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах b_1 ,b_2 ,...,b_n. Известны c_{ij} (i=1,2,…,m, j=1,2,…,n) — стоимости перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны. Исходные данные транспортной задачи обычно записываются в таблице или в виде векторов запасов поставщиков, запросов потребителей и матрицы стоимостей.

Для классической транспортной задачи выделяют два типа задач: критерий стоимости (достижение минимума затрат на перевозку) или расстояний и критерий времени (затрачивается минимум времени на перевозку) [2].

1. По критерию стоимости:

$$f\,(X') = \sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ik}x_{ik} \rightarrow min$$

$$\begin{cases} MX = D \\ X \geq 0 \end{cases}$$

2. По критерию времени:

$$f\,(X') = max\ t_{ik} \rightarrow min$$

$$\begin{cases} MX = D \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Также различают три вида транспортных задач согласно условию сбалансированности [3]:

— сбалансированная транспортная задача, в случае, если количество произведенной продукции равно суммарной потребности в ней;

— транспортная задача в условиях перепроизводства, в этом случае для сведения ее к сбалансированной транспортной задаче необходимо ввести фиктивный пункт потребления, стоимость перевозки единицы продукции в который равен нулю;

— транспортная задача в условиях дефицита, в этом случае для сведения ее к сбалансированной транспортной задаче необходимо ввести фиктивный пункт производства, стоимость перевозки с которого можно принять равной 0.

Для решения любой транспортной задачи необходимо, в первую очередь, составить опорный план. Это можно сделать различными способами, однако для всех способов непременным является требование, чтобы в процессе заполнения распределительной таблицы в каждую загружаемую клетку вписывалась максимально возможная по величине поставка. В таком случае каждый раз будет либо исчерпываться весь запас груза у поставщика, либо полностью удовлетворяться спрос потребителя. Рассмотрим три основных метода составления опорного плана [3].

Решение транспортных задач при помощи MathCAd

Рассмотрим пример транспортной задачи при условии сбалансированности.

В кондитерский концерн Куликовский из трех фабрик, и пяти магазинов. Фабрики производят 250, 275 и 225 единиц продукции в неделю. Пяти магазинам требуется 100, 200, 50, 275 и 125 единиц продукции еженедельно. Стоимость перевозки единицы продукции с завода в магазин приведена в таблице 1.

Таблица 1. Стоимость перевозки единицы продукции

	Магазины				
	1	2	3	4	5
Фабрика 1	1,5	2	1,75	2,25	2,25
Фабрика 2	2,5	2	1,75	1	1,5
Фабрика 3	2	1,5	1,5	1,75	1,75

Необходимо составить план перевозок с целью минимизации суммарных транспортных расходов.

Рассмотрим математическую модель задачи. Пусть x_{ij} — неизвестный объем перевозок с i-й фабрики в j-й магазин. Необходимо минимизировать суммарные транспортные расходы $z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij}$, где c_{ij} — стоимость перевозки с i-й фабрики в j-й магазин. Неизвестные x_{ij} должны удовлетворять следующим ограничениям:

— объемы перевозок не могут быть отрицательными (xij ≥0);

— вся продукция должна быть вывезена с заводов $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \alpha_i, i = 1 \dots 3$, где a_i — объем производства на i-м заводе;

— потребности всех магазинов должны быть полностью удовлетворены $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j$, j=1..5, где bj — потребности j-го магазина.

Таким образом, получается следующая оптимизационная задача. Найти значения матрицы X (*xij*), при которых функция цели Z достигает своего минимального значения, и удовлетворяются отграничения, сформулированные выше [4].

При решении транспортной задачи в MathCAd с помощью решающего блока необходимо:

1. Определить матрицу C и вектора a и b.
2. Сформировать функцию цели Z.
3. Задать матрицу начального приближения X.
4. В решающем блоке ввести ограничения, для этого необходимо сформировать массивы, в которых хранятся $\sum_{i=1}^{3} x_{ij}$ и $\sum_{j=1}^{5} x_{ij}$
5. Решить задачу оптимизации с помощью функции Minimize.

Исходные данные для рассматриваемой транспортной задачи в MathCAd формируются следующим образом:

C - матрица стоимостей перевозок

b - массив потребностей по магазинам

ORIGIN := 1

$$C := \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 1.75 & 1.25 & 2.25 \\ 2.5 & 1.5 & 1.75 & 1 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 1.5 & 1.75 & 1.75 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \\ 275 \\ 125 \end{pmatrix}$$

a - массив производственных мощностей фабрик

$$a := \begin{pmatrix} 250 \\ 275 \\ 225 \end{pmatrix}$$

Условие сбалансированной задачи

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 750 \qquad \sum_{j=1}^{5} b_j = 750$$

Начальное приближение $x_{j,5} := 0$

Функции sumRows(x) и sumColumns(x) формируют массивы, в которых храняться суммы по строкам $\sum_{j=1}^{5} x_{i,j}$ и столбцам $\sum_{i=1}^{3} x_{i,j}$

```
sumRows(x) :=  | for i ∈ 1..3
               |   | x_i ← 0
               |   | for j ∈ 1..5
               |   |   x_i ← x_i + x_i,j
               | x

sumColumns(x) := | for j ∈ 1..5
                 |   | x_j ← 0
                 |   | for i ∈ 1..3
                 |   |   x_j ← x_j + x_i,j
                 | x
```

$$Z(x) := \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} \left(C_{i,j} \cdot x_{i,j}\right)$$

Рис. 1. Формирование исходных данных транспортной задачи в MathCAd

Затем необходимо осуществить поиск оптимального решения задачи с использованием блока Given — Minimize. [1] В качестве условий принимаются следующие утверждения:

1. Значения всех искомых переменных x_{ij} должны быть неотрицательными.

2. Массив, получаемый при использовании функции суммирования по строкам, должен быть равен вектору производственных мощностей фабрик.

3. Массив, получаемый при использовании функции суммирования по столбцам, должен быть равен массиву потребностей по магазинам.

В результате выполнения данного алгоритма получим оптимальный план перевозок для данных условий и соответствующее значение целевой функции.

Given

$x \geq 0$

$\mathrm{sumRows}(x) = a$

$\mathrm{sumColumns}(x) = b$

$x := \mathrm{Minimize}(Z, x)$

$$x = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 125 & 125 \\ 0 & 175 & 50 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z(x) = 1.025 \times 10^{3}$$

Рис. 2. Решающий блок для сбалансированной задачи в MathCad

Теперь рассмотрим алгоритм решения транспортной задачи в условиях перепроизводства в MathCad.

Необходимо спланировать план перевозок с целью минимизации суммарных транспортных расходов. Задача является несбалансированной. Для ее решения введем фиктивный магазин, в который необходимо перевести количество продукции, равное разности между произведенной на всех фабриках продукцией и необходимой магазинам. В данном случае эта разница равна 10. Стоимость перевозки в фиктивный магазин примем равной 0. Внеся некоторые изменения в решение предыдущей задачи, получим решающий блок для транспортной задачи в условиях перепроизводства. Решающий блок транспортной задачи в условиях дефицита в MathCad формируется аналогично. Рассмотрим пример такой задачи. В кондитерский концерн входят три фабрики и пять магазинов. Фабрики производят 250, 275 и 225 единиц продукции в неделю. Пяти магазинам требуется 100, 200, 50, 275 и 150 единиц продукции еженедельно. Стоимость перевозки единицы продукции с завода в магазин приведена в таблице. Необходимо спланировать план перевозок с целью минимизации суммарных транспортных расходов. Данная задача также не является сбалансированной. Необходимо ввести фиктивную фабрику, производящую недостающее количество продукции. Стоимость перевозки с этой фабрики примем равной 0.

$$ORIGIN := 1$$

$$C := \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 1.75 & 1.25 & 2.25 & 0 \\ 2.5 & 1.5 & 1.75 & 1 & 1.5 & 0 \\ 2 & 1.5 & 1.5 & 1.75 & 1.75 & 0 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \\ 275 \\ 125 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$a := \begin{pmatrix} 250 \\ 275 \\ 225 \end{pmatrix}$$

$$x_{j,6} := 0$$

$$sumRows(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..3 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_1 \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 1..6 \\ \quad x_i \leftarrow x_i + x_{i,j} \end{array} \right. \\ x \end{array} \right.$$

$$sumColumns(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 1..6 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_j \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..3 \\ \quad x_j \leftarrow x_j + x_{i,j} \end{array} \right. \\ x \end{array} \right.$$

$$Z(x) := \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{6} \left(C_{i,j} \cdot x_{i,j} \right)$$

Given

$$x \geq 0$$

$$sumRows(x) = a$$

$$sumColumns(x) = b$$

$$x := Minimize(Z, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 140 & 0 & 10 \\ 0 & 25 & 0 & 125 & 125 & 0 \\ 0 & 185 & 50 & 7.105 \times 10^{-15} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z(x) = 1.028 \times 10^{3}$$

Рис. 3 Решающий блок для транспортной задачи в условиях перепроизводства на MathCad

$$ORIGIN := 1$$

$$C := \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 1.75 & 1.25 & 2.25 \\ 2.5 & 1.5 & 1.75 & 1 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 1.5 & 1.75 & 1.75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \\ 275 \\ 125 \end{pmatrix}$$

$$a := \begin{pmatrix} 250 \\ 275 \\ 225 \end{pmatrix}$$

$$x_{i,5} := 0 \qquad a_4 := \sum_{j=1}^{5} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i$$

$$sumRows(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..4 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 1..5 \\ \quad x_i \leftarrow x_i + x_{i,j} \end{array} \right. \\ x \end{array} \right.$$

$$sumColumns(x) := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 1..5 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_j \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..4 \\ \quad x_j \leftarrow x_j + x_{i,j} \end{array} \right. \\ x \end{array} \right.$$

$$Z(x) := \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} \left(C_{i,j} \cdot x_{i,j} \right)$$

Given

$$x \geq 0$$

$$sumRows(x) = a$$

$$sumColumns(x) = b$$

$$x = Minimize(Z, x)$$

$$x := \begin{pmatrix} 75 & 0 & 8.831 & 166.169 & 0 \\ 0 & 16.169 & 0 & 108.831 & 150 \\ 0 & 183.831 & 41.109 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z(x) = 1.031 \times 10^3$$

Рис. 4 Решающий блок для транспортной задачи в условиях дефицита в MathCad

Заключение

Транспортная задача может решаться многими способами: вручную, с помощью стандартных программных средств (Excel), либо с помощью специальных программ. Однако изучение данного класса задач без использования современных программ требует довольно глубоких знаний в данной области и отнимает много времени. Таким образом, решать транспортные задачи «в ручном режиме» за строго определенный интервал времени могут лишь специалисты в области прикладной математики. Тем не менее, количество областей применения линейного программирования постоянно увеличивается.

Методы математического моделирования применяются как при изучении отдельных проблем математики, так и в прикладных областях: экономики, логистики, программировании. Существуют различные программные комплексы, имеющие в своем распоряжении необходимый инструментарий для построения математических моделей и решения задач линейного программирования (в том числе, транспортных задач). В данной статье были рассмотрены возможности системы автоматизированного проектирования MathCad в области математического моделирования, составлены алгоритмы для решения транспортных задач с различными условиями. Предложенный способ решения транспортной задачи может быть использован не только в учебных целях, но и при решении практических задач.

Практическая значимость данного исследования заключается в том, что алгоритм и методы решения задачи транспортной логистики могут быть использованы как при изучении некоторых тем математики, экономики в ВУЗах, так и при проведении исследовательских работ, для решения реальных экономических и технических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. - СПб. : Изд-во «Лань», 2011. - 352 с.
3. Доманова, Ю.А., Черняк А.А., Черняк Ж.А. Высшая математика на базе Mathcad: общий курс. — С-Пб: БХВ Петербург, 2016. – 604 с.
4. Карпычева М .В., Филимонова З.В. Транспортная логистика: Методические указания для практических занятий. – М.: М ГУПС (М ИИТ), 2015. - 54 с.
2. Мелихова Е.В. Применение комплексов программ Mathcad для решения задач математического моделирования. Волгоградский государственный аграрный университет, 2016- 140с.
3. Просветов Г.И. Математические методы в логистике: задачи и решения: учебно-практическое пособие. 2-е изд. доп. - М.: Издательство «АльфаПресс», 2012. - 304 с
5. Wikipedia: [Электронный ресурс]. URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Транспортная_задача