

УДК-519.622(575.2)(04)

О МЕТОДАХ ЭЙЛЕРА И РУНГЕ-КУТТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А.М. Осмонканов, М.М. Султанова

КГУСТА им.Н. Исанова

Пусть требуется решить дифференциальное уравнение первого порядка $y = f(x; y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ в некотором промежутке $x_0 \leq x \leq x_0 + a$.

Для решения уравнения будем пользоваться одним из следующих численных методов.

Метод Эйлера.

Назовем величину $h_n = x_{n+1} - x_n$ – шагом интегрирования. Эта величина выбирается малой. Метод Эйлера состоит в том, что в коротком промежутке $x_n \leq t \leq x_n + h$ функцию $f(t; y(t))$ приближенно заменяют постоянной величиной $f(x_n; y_n)$, которая определена, если величина x_n выбрана, а y_n уже определена. Тогда, имеет место равенство:

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n; y_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1)$$

позволяющее последовательно определять величины $y_1, y_2, \dots, y_n$ если заданы x_0 и y_0 и выбраны узлы.

Используя формулу (1) проводим вычисления. Результаты

представим в виде таблицы1.

Таблица 1.

n	x_n	y_n	$f(x_n; y_n)$	y_{n+1}
0	0	1,5000	1,5000	1,875
1	0,25	1,875	1,625	2,2812
2	0,5	2,2812	1,7812	2,7265
3	0,75	2,7265	1,9765	3,2206
4	1	3,2206	2,2206	3,7756
5	1,25	3,7756	2,5256	4,4070
6	1,5	4,4070	2,9070	

Метод Рунге-Кутты

Пусть $r \geq 2$ – целое положительное число и $a_1, a_2, \dots, a_{r-1}$ – положительные числа.

Пусть числа $\beta_{sm} (s = 1, 2, \dots, r-1; m = 1, 2, \dots, s)$ и $y_1, y_2, \dots, y_r$ удовлетворяют условиям:

$$\sum_{m=1}^s \beta_{sm} = \alpha_s (s = 1, 2, \dots, r-1) \quad \sum_{j=1}^r \gamma_j = 1$$

Один этап метода Рунге-Кутты (переход от x_n к x_{n+1}) таков:

1. Вычисляются одно за другим следующие числа:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n; y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \alpha_1 h; y_n + \beta_{11} k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \alpha_2 h; y_n + \beta_{21} k_1 + \beta_{22} k_2) \\ &\dots \dots \dots \\ k_{j+1} &= hf(x_n + \alpha_j h; y_n + \beta_{j1} k_1 + \beta_{j2} k_2 + \dots + \beta_{jj} k_j) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$k_r = hf(x_n + \alpha_{r-1}h; y_n + \beta_{r-1,1}k_1 + \beta_{r-1,2}k_2 + \dots + \beta_{r-1,r-1}k_{r-1})$$

2. Вычисляется сумма произведений:

$$k = \sum_{j=1}^r \gamma_j k_j \quad (2)$$

3. Вычисляется y_{n+1} по формуле: $y_{n+1} = y_n + k$

Числа $\alpha_s, \beta_{sm}, \gamma_j$ при заданном r выбираются так, чтобы разность:

$$\int_{x_n}^{x_n+h} (f(t; y(t))) dt - k$$

$(y(t))$ решение исходного уравнения, удовлетворяющее условию $y(x_n) = y_n$, рассматриваемая как функция переменного h была бесконечно малой возможно более высокого порядка/относительно h при $h \rightarrow 0$.

Приведем наиболее употребительную систему этих чисел:

$$r = 4, \alpha_1 = \beta_{11} = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \beta_{22} = \frac{1}{2}, \beta_{21} = 0, \alpha_3 = \beta_{33} = 1, \beta_{31} = \beta_{32} = 0, \gamma_1 = \gamma_4 = \frac{1}{6},$$

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \frac{1}{3}, l = 5$$

Такой прием будем называть соответствующим приемом Рунге-Кутты. Приведем порядок вычислений в этом случае:

1. Вычисляется $k_1^{(n)} = h_n f(x_n; y_n)$
2. Вычисляется $k_2^{(n)} = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}; y_n + \frac{k_1^{(n)}}{2}\right)$
3. Вычисляется $k_3^{(n)} = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}; y_n + \frac{k_2^{(n)}}{2}\right)$
4. Вычисляется $k_4^{(n)} = h_n f(x_n + h_n; y_n + k_3^{(n)})$
5. Вычисляется $k^{(n)} = \frac{1}{6}(k_1^{(n)} + 2k_2^{(n)} + 2k_3^{(n)} + k_4^{(n)})$

6. Вычисляется $y_{n+1} = y_n + k^{(n)}$

Используя соответствующий прием Рунге-Кутты, состоящий из шагов 1 – 6 проводим вычисления. Результаты представим в таблице 2

Таблица 2.

n	x_n	y_n	$k_1^{(n)}$	$k_2^{(n)}$	$k_3^{(n)}$	$k_4^{(n)}$	k_4	y_{n+1}
0	0	1,5000	0,3750	0,3906	0,3926	0,4106	0,3920	1,8920
1	0,25	1,8920	0,4105	0,4306	0,4331	0,4562	0,4323	2,3243
2	0,50	2,3243	0,4561	0,4818	0,4850	0,5148	0,4841	2,8084
3	0,75	2,8084	0,5146	0,5477	0,5518	0,5900	0,5506	3,3590
4	1,00	3,3590	0,5896	0,6322	0,6375	0,6866	0,6359	3,9949
5	1,25	3,9949	0,6862	0,7408	0,7476	0,8106	0,7456	4,7405
6	1,50	4,7405	0,8101	0,8802	0,8889	0,9699	0,8863	

Окончательно представим результаты вычисления в таблице 3.

Здесь $y_{\text{точ}}$ – точное решение уравнения в точке

$x = 1,5$ $y_{\text{приб}}$ – приближенное решение уравнения в точке $x = 1,5$, $\varepsilon = |y_{\text{точ}} - y_{\text{приб}}|$ – погрешность метода.

Таблица 3.

Метод решения	$y_{\text{точ}}$	$y_{\text{приб}}$	ε
Метод Эйлера	4,4070	4,7408	0,3338
Метод Рунге – Кутта	4,7405	4,7408	0,0003

Поставим перед собой задачу: разработать программу, позволяющую решать дифференциальные уравнения первого порядка. Представим код программ на языке Delphi.

```

unit Unit1;
interface
uses
    Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics,
    Controls, Forms,
    Dialogs, StdCtrls;
type
    TForm1 = class(TForm)
        Label1: TLabel;
        Label2: TLabel;
        Label3: TLabel;
        Label4: TLabel;
        Label5: TLabel;
        Label6: TLabel;
        Label7: TLabel;
        Edit1: TEdit;
        Edit2: TEdit;
        Edit3: TEdit;
        Edit4: TEdit;
        Button1: TButton;
        ListBox1: TListBox;
        procedure Button1Click(Sender: TObject);
    private
        { Private declarations }
    public
        { Public declarations }
    end;
var
    Form1: TForm1;
implementation

```

```

{$R *.dfm}

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var
i:integer;
a,b,m,h,y,x,y1:real;
k1,k2,k3,k4:real;
function f(x,y:real):real;
begin
f:=y-x; end;
begin
a:=StrToFloat(edit1.Text);
b:=StrToFloat(edit2.Text);
m:=StrToFloat(edit3.Text);
y:=StrToFloat(edit4.Text);
h:=(b-a)/m; y1:=y; i:=1; x:=a;
repeat
k1:=h*f(x,y);
x:=x+h/2;
y:=y1+k1/2;
k2:=h*f(x,y);
y:=y1+k2/2;
k3:=h*f(x,y);
x:=x+h/2;
y:=y1+k3;
k4:=h*f(x,y);
y:=y1+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
ListBox1.Items.Add(FormatFloat('y(0.#####)=',x)+FormatFloat('0.#####',y))
;
i:=i+1; y1:=y;
until not (i<=m);

```

end; end.

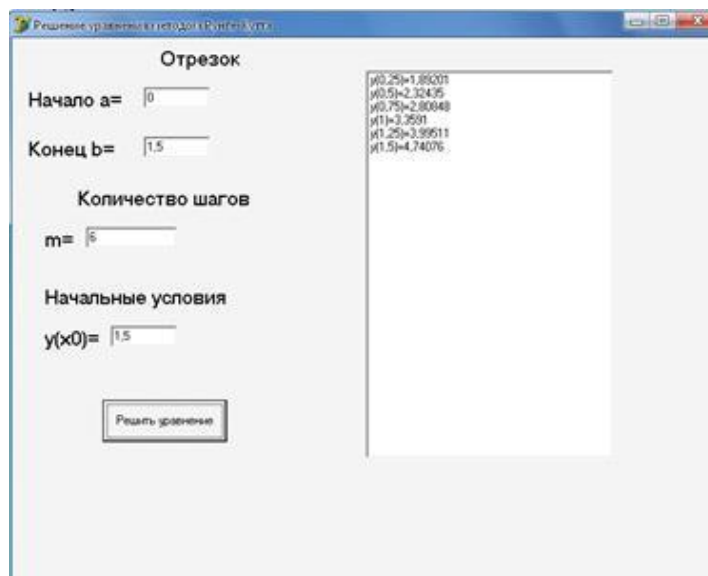


Рис. 1. Интерфейс программы и результаты решения уравнения

Таким образом, наиболее точное численное решение дифференциальных уравнений первого порядка дает и метод Рунге – Кутта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов: учеб.пособие М.:АСТ: Астрель; Владимир: ВКТ, 2008. – 495 с.
2. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах.М.: Наука.1972. – 368 с.
3. Михлин С.Г., Березин С.Г, СмолицкийХ.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука. 1965. — 386 с.