

УДК 533 (075.8), 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗРЫВА В АТМОСФЕРНОМ ГАЗЕ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ ДАВИДОВА

А.Б. Чечейбаев, Э.Б. Чечейбаева, Н.Т. Эстебесова

Университет Центральной Азии, КГУСТА им. Н. Исанова

Одним из мощных методов современного вычислительного эксперимента является метод крупных частиц, разработанный Ю.М. Давыдовым [1, 2 и др.]. Метод крупных частиц широко используется при решении задач науки и технологий - в механике сплошных сред, газовой динамике, гидродинамике, физике плазмы, нефте- и газодобыче и др.

Рассмотрим задачу о взрыве в атмосфере. Математической моделью задачи является нестационарная система уравнений Эйлера, состоящая из уравнений неразрывности, импульса и энергии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{U}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot u \cdot \vec{U}) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot v \cdot \vec{U}) + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot E \cdot \vec{U}) + \operatorname{div}(p \cdot \vec{U}) = 0 \quad (4)$$

где ρ - плотность газа, p - давление газа, U - скорость газа, E - удельная полная энергия. Система (1) - (4) замыкается уравнением состояния:

$$p = \rho \cdot I \cdot (\gamma - 1), \quad (5)$$

здесь $I = E - \frac{1}{2} \cdot (u^2 + v^2)$ - удельная внутренняя энергия, γ - показатель адиабаты среды, принятый равным 1,4 в данной работе.

Исходная система (1) - (5) приводится к безразмерному виду, используя в качестве характерных физических параметров характерную скорость U_0 , характерную длину l_0 и характерную плотность ρ_0 . Тогда остальные характерные параметры задачи определяются так: $p_0 = \rho_0 \cdot U_0^2$, $E_0 = U_0^2$, $t_0 = l_0/U_0$. Положим, что $U_0 = 10^{5/2}$ м/с, $\rho_0 = 1$ кг/м³, $l_0 = 1$ м, $p_0 = 10^5$ Па, $E_0 = 10^5$ Дж. Безразмерные величины представляются в следующем виде: $\tilde{l} = l/l_0$, $\tilde{U} = U/U_0$, $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$, $\tilde{p} = p/(\rho_0 \cdot U_0^2)$, $\tilde{E} = E/(\rho_0 \cdot U_0^2)$.

Для расчета взрыва в атмосфере используем классический алгоритм метода крупных частиц, предложенный в кандидатской диссертации Ю.М. Давыдова для решения задач газовой динамики [1].

Эйлеров этап. На данном этапе пренебрегаем потоками массы, импульса и энергии через границы эйлеровых ячеек. Тогда дифференциальные уравнения и разностные схемы примут следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \rho \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\tilde{u}_{i,j}^n = u_{i,j}^n - \frac{p_{i+\frac{1}{2},j}^n - p_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x}, \quad (7)$$

$$\tilde{v}_{i,j}^n = v_{i,j}^n - \frac{p_{i,j+\frac{1}{2}}^n - p_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y}, \quad (8)$$

$$\tilde{E}_{i,j}^n = E_{i,j}^n - \frac{p_{i+\frac{1}{2},j}^n u_{i+\frac{1}{2},j}^n - p_{i-\frac{1}{2},j}^n u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n} - \frac{p_{i,j+\frac{1}{2}}^n v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - p_{i,j-\frac{1}{2}}^n v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n}, \quad (9)$$

где параметры на границах ячеек, рассчитываются, например, так:

$$p_{i+\frac{1}{2},j}^n = \frac{p_{i+1,j}^n + p_{i,j}^n}{2}.$$

Лагранжев этап. На этом этапе вычисляются эффекты переноса, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю

эйлерову сетку. Здесь находятся за время Δt потоки массы ΔM^n через границы эйлеровых ячеек.

Исходное уравнение неразрывности (1) в разностной форме запишется так (в предположении, что поток жидкости через ячейку (i, j) направлен слева направо и снизу вверх):

$$\rho_{i,j}^{n+1} \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \rho_{i,j}^n \cdot \Delta x \cdot \Delta y + \Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n - \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n + \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n \quad (10)$$

На этом этапе вычисляются потоки массы ΔM^n :

$$\begin{aligned} \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n &= \langle \rho_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle \cdot \Delta y \cdot \Delta t, \quad \Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n = \langle \rho_{i-\frac{1}{2},j}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n \rangle \cdot \Delta y \cdot \Delta t, \\ \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n &= \langle \rho_{i,j+\frac{1}{2}}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^n \rangle \cdot \Delta x \cdot \Delta t, \quad \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n = \langle \rho_{i,j-\frac{1}{2}}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \rangle \cdot \Delta x \cdot \Delta t, \end{aligned} \quad (11)$$

где, например, поток массы через правую границу ячейки $\Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n$ определялись по формулам первого порядка точности:

Если $u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n > 0$, то $u_{i+1/2,j}^n = (u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n) / 2$, $\rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i,j}^n$.

Если $u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n < 0$, то $u_{i+1/2,j}^n = (u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n) / 2$, $\rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i+1,j}^n$.

(12)

Заключительный этап. Здесь происходит перераспределение массы, импульса и энергии по пространству и определяются окончательные поля эйлеровых физических параметров потока на фиксированной расчетной сетке в следующий момент времени $t^{n+1} = t^n + \Delta t$.

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \frac{\sum \Delta M_k}{\Delta x \cdot \Delta y} = \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n - \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n + \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x \cdot \Delta y}, \quad (13)$$

$$X_{i,j}^{n+1} = \frac{\rho_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}} \tilde{X}_{i,j}^n + \frac{\tilde{X}_{i-1,j}^n \Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n - \tilde{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n + \tilde{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \tilde{X}_{i,j+1}^n \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \cdot \Delta x \cdot \Delta y}, \quad (14)$$

где $X = \{u, v, E\}$.

Для моделирования граничных условий на границах области интегрирования применялся метод фиктивных ячеек, разработанный автором метода Ю.М. Давыдовым [1 и др.].

Условие свободного вытекания, например, на правой границе области интегрирования, достигалось следующими условиями для двух слоев фиктивных ячеек:

$$\begin{aligned}\rho_{N+1,j}^n &= \rho_{N,j}^n, \quad p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n, \quad E_{N+1,j}^n = E_{N,j}^n, \quad u_{N+1,j}^n = u_{N,j}^n, \quad v_{N+1,j}^n = v_{N,j}^n \\ u_{N+2,j}^n &= 2 \cdot u_{N,j}^n - u_{N-1,j}^n, \quad v_{N+2,j}^n = 2 \cdot v_{N,j}^n - v_{N-1,j}^n, \\ E_{N+2,j}^n &= 2 \cdot E_{N,j}^n - E_{N-1,j}^n, \quad p_{N+2,j}^n = 2 \cdot p_{N,j}^n - p_{N-1,j}^n, \\ \rho_{N+2,j}^n &= 2 \cdot \rho_{N,j}^n - \rho_{N-1,j}^n.\end{aligned}$$

Условия непротекания на нижней границе области интегрирования:

$$\begin{aligned}\rho_{i,M-1,j}^n &= \rho_{i,M}^n, \quad p_{i,M-1,j}^n = p_{i,M}^n, \quad E_{i,M-1,j}^n = E_{i,M}^n, \quad u_{i,M-1,j}^n = u_{i,M}^n, \\ v_{i,M-1,j}^n &= -v_{i,M}^n.\end{aligned}$$

Имитация взрыва в атмосфере достигалась постановкой условия, предложенного в работе [4]:

$$\rho_{k,l}^n = M \cdot \rho_{start},$$

где M – коэффициент, характеризующий мощность взрыва, ρ_{start} – начальная плотность невозмущенного газа. До начала взрыва газ принимался покоящимся (скорость равна нулю), $\tilde{\rho} = 1, \tilde{p} = 1$.

В первой серии проведенных вычислительных экспериментов область интегрирования представляла собой квадрат, разбитый на 201 ячейку по каждой стороне. Адрес ячейки взрыва в атмосфере: номер ячейки по горизонтальной оси равен 101 слева направо, а по вертикальной оси – 41 ячейка снизу вверх. На левой, верхней и правой границах области интегрирования ставились условия свободного вытекания, а на нижней – условия непротекания. Коэффициент M в ячейке взрыва варьировался в пределах интервала $[1; 30]$. Безразмерные шаги интегрирования выбраны так: $\tilde{dx}=0.1$, $\tilde{dy}=0.1$, $\tilde{dt}=0.01$.

На рис. 1 представлено распределение безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=3000$. Горизонтальными

осями графика служат безразмерные расстояния от точки взрыва параллельно сторонам области интегрирования.

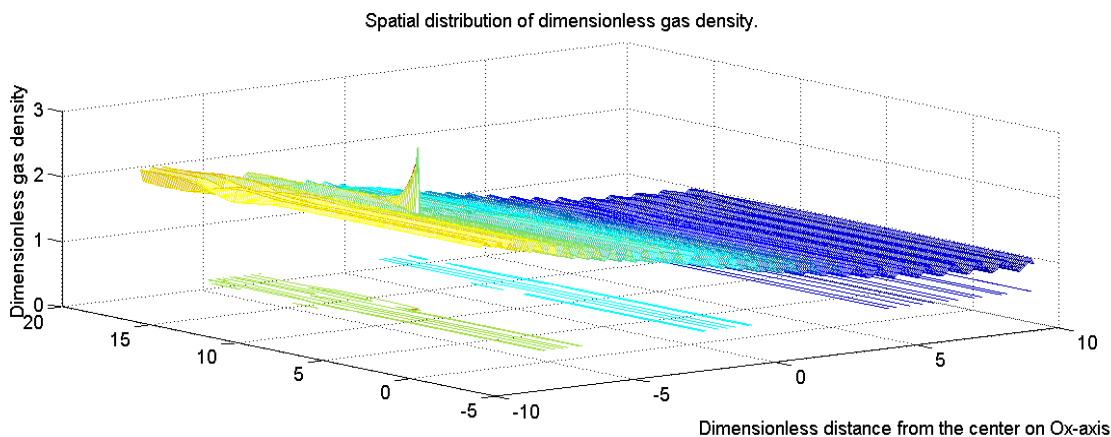


Рис. 1. Плотность газа

На рисунке 3 изображено распределение безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=3000$. По горизонтальной оси отложено безразмерное расстояние от точки взрыва вдоль горизонтальной линии области интегрирования. $M=3$.

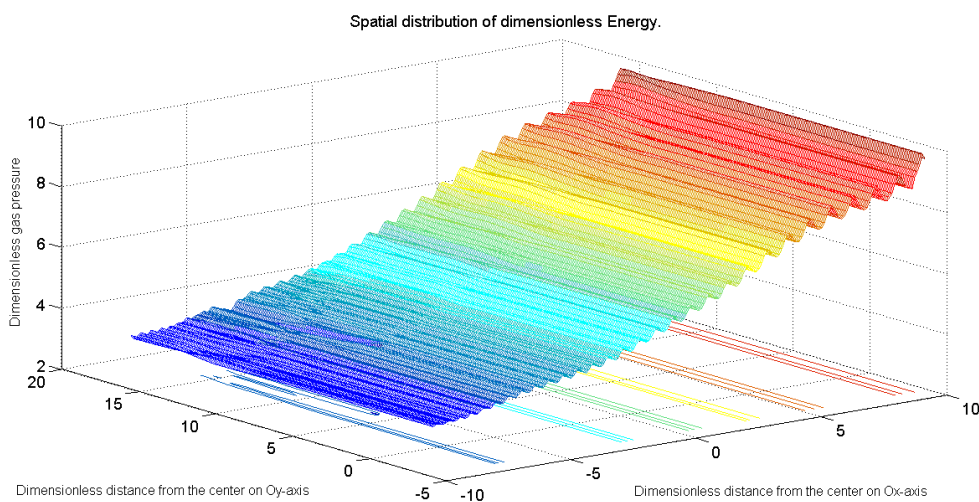


Рис. 2. $M=3$. Распределение безразмерной удельной энергии газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=3000$.

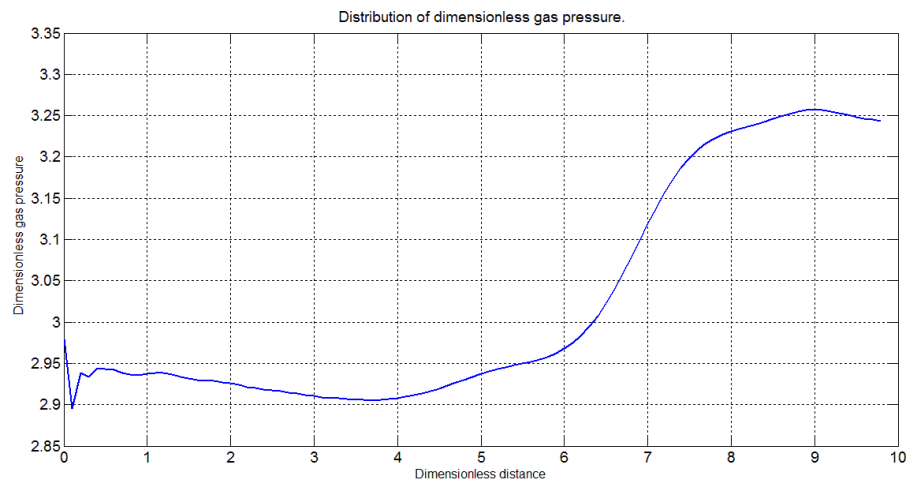


Рис. 3. распределение безразмерной плотности газа

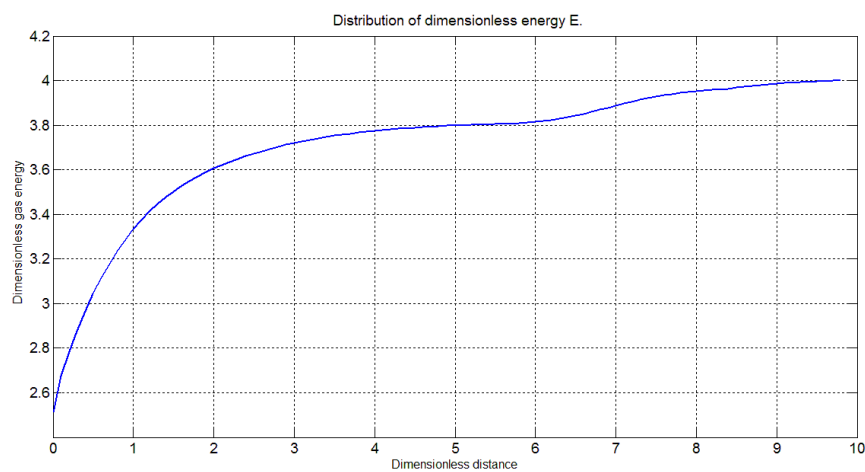


Рис. 4. $M=3$. Распределение безразмерной удельной энергии газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=3000$.

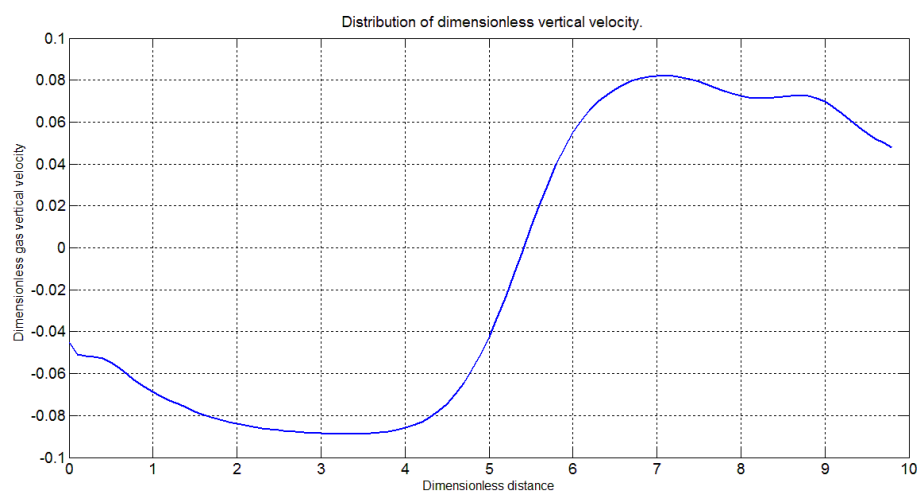


Рис. 5. $M=3$. Распределение безразмерной вертикальной составляющей вектора скорости газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=300$.

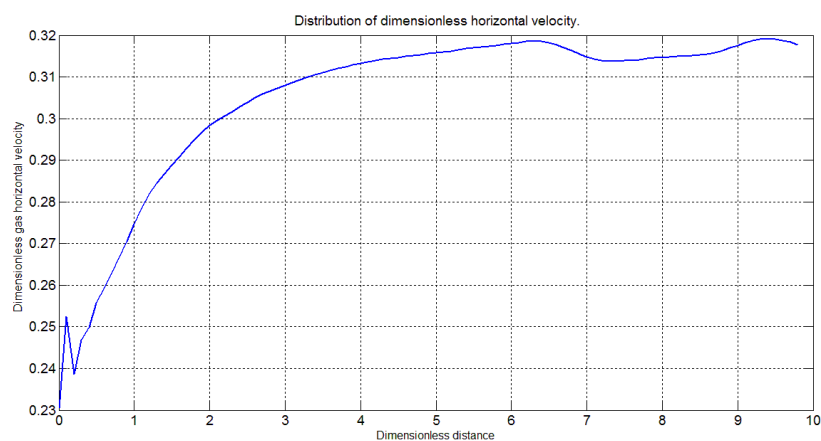


Рис. 6. $M=3$. Распределение безразмерной горизонтальной составляющей вектора скорости газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=3000$.

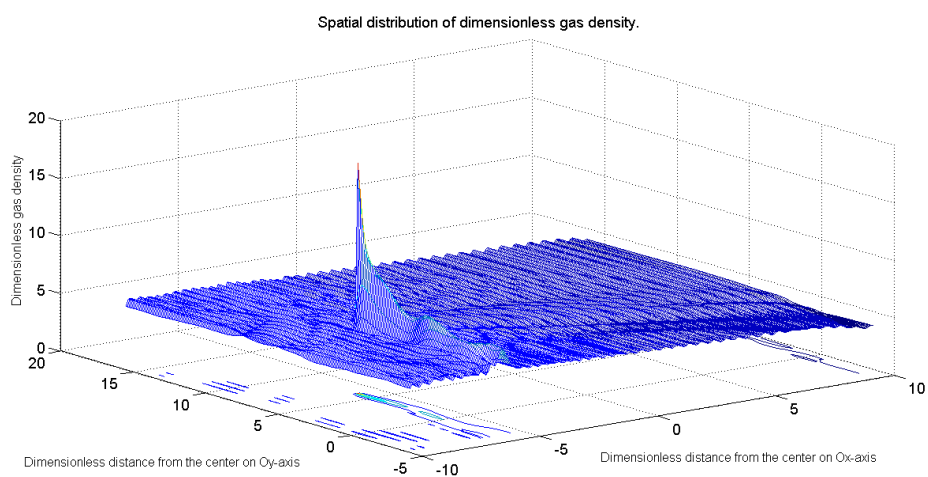


Рис. 7. $M=20$. Распределение безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=2500$.

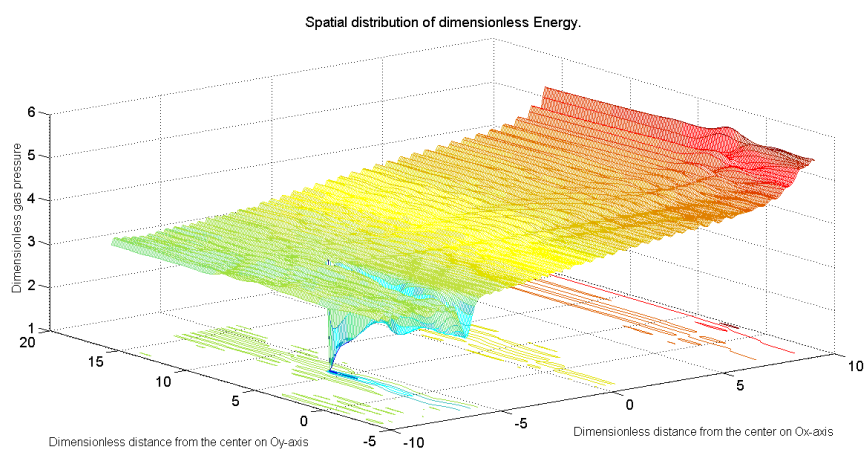


Рис. 8. $M=20$. Распределение безразмерной удельной энергии газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=2500$.

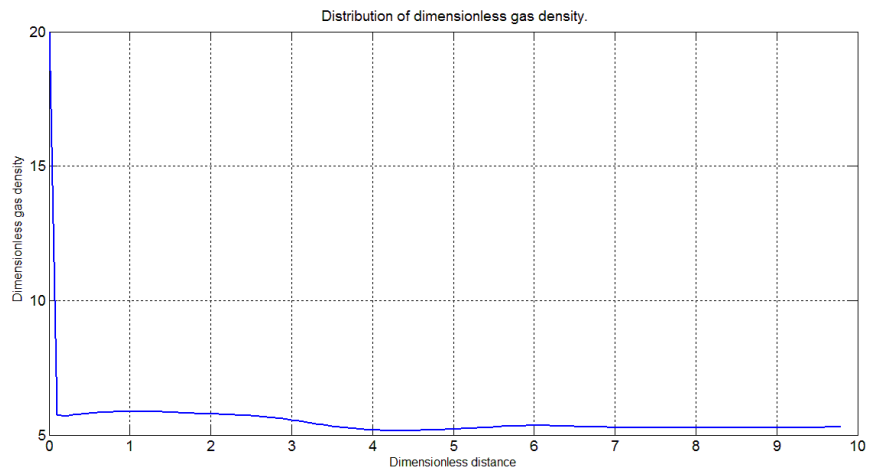


Рис. 9. $M=20$. Профиль безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=2500$.

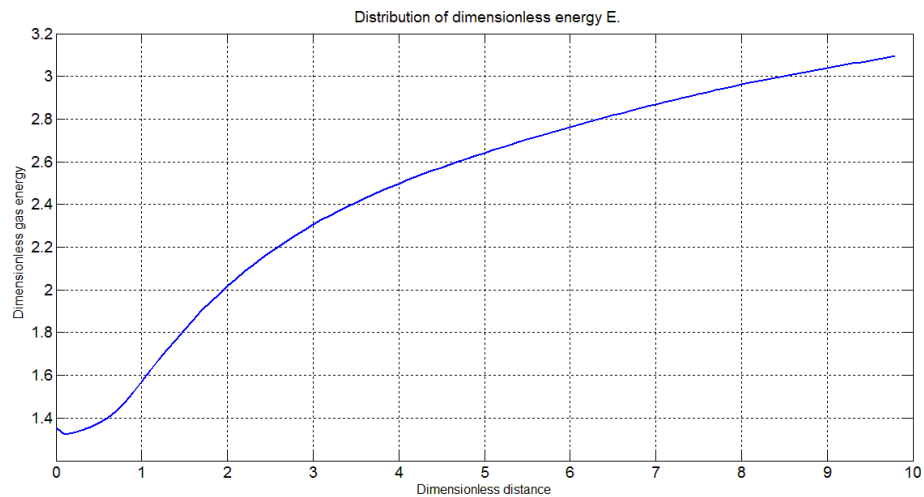


Рис. 10. $M=20$. Профиль безразмерной удельной энергии газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=2500$.

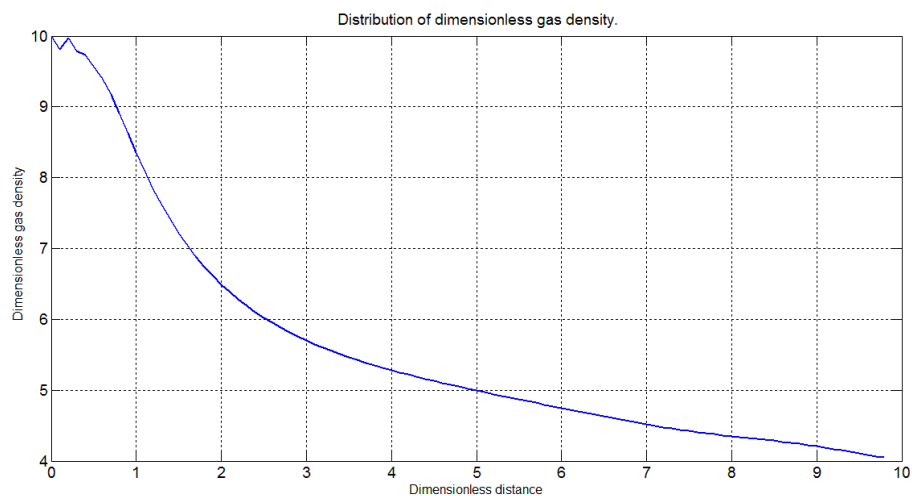


Рис. 11. $M=20$. Профиль безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=2500$.

Во второй серии проведенных численных расчетов область интегрирования представляла собой квадрат, разбитый на 201 ячейку по каждой стороне. Ячейка взрыва находится в центре области интегрирования: номер ячейки по горизонтальной оси равен 101 слева направо, по вертикальной оси также 101 ячейка снизу вверх. На всех четырех границах области интегрирования ставились условия свободного вытекания. Коэффициент M в ячейке взрыва варьировался в пределах интервала $[1; 30]$. Безразмерные шаги интегрирования выбраны так: $\bar{dx}=0.1$, $\bar{dy}=0.1$, $\bar{dt}=0.01$.

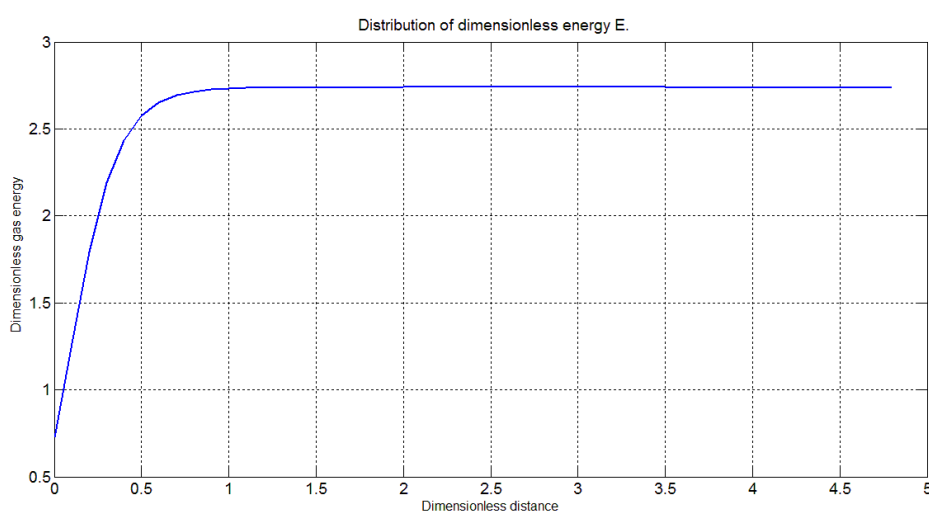


Рис. 12. $M=5$. Профиль безразмерной удельной энергии газа в безразмерный момент времени $\bar{t}=1000$.

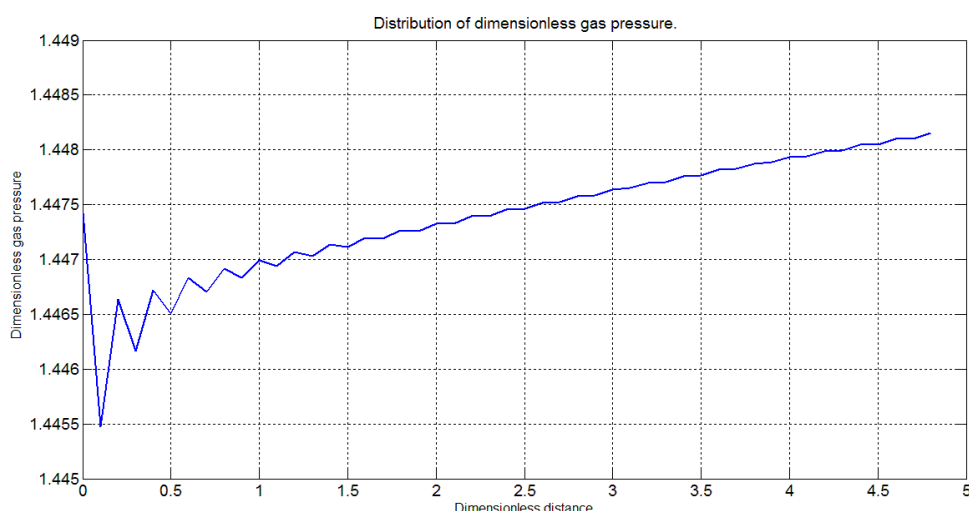


Рис. 12. $M=5$. Профиль безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\bar{t}=1000$.

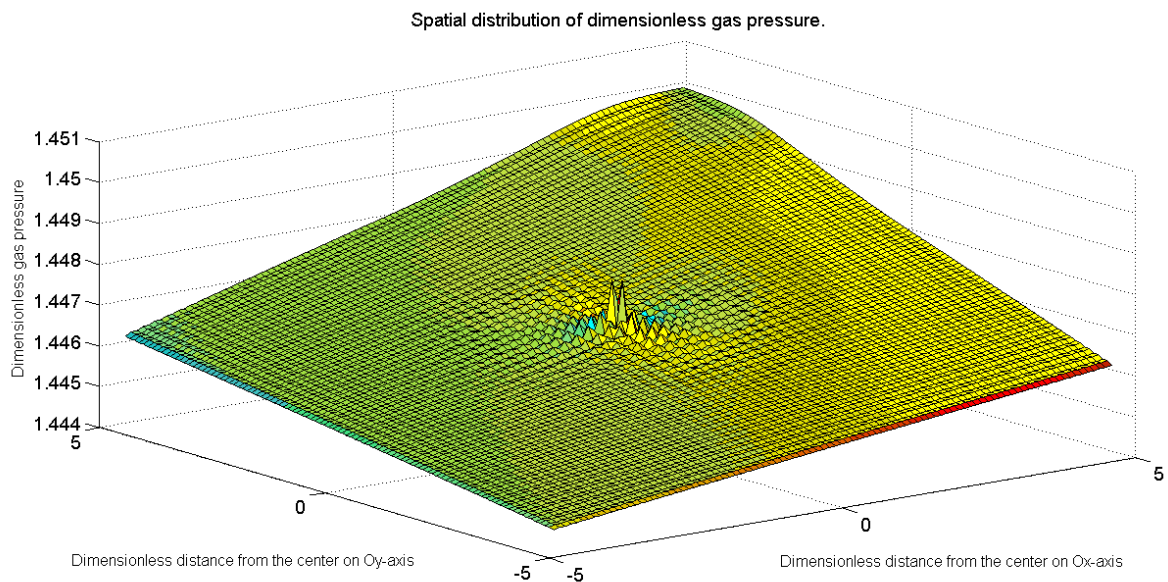


Рис. 13. $M=5$. Распределение безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=1000$

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц для задач газовой динамики. Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ. - мат. наук. – М.: МФТИ, 1970. – 183 с.
2. Yuri M. Davydov. Large-Particle Method. - In.: Encyclopaedia of Mathematics, vol.5. - Dordrecht/Boston/London: Kluwer academic publishers, 1990, p.p. 358-360.
3. Давыдов Ю.М., Чечейбаев Б., Давыдова И.М. и др. Исследование актуальных проблем механики и машиностроения. /Под ред. Ю.М. Давыдова, в 5-ти томах. – М.: НАПН РФ, 1995. - 1658 с.
4. Акжолов М.Ж., Мадера А.Г., Сотников А.Н. Численные методы решения задач математической физики на высокопроизводительном вычислительном комплексе МСЦ в режиме удаленного доступа. – М.: Московский гос. ин-т радиотехники, электроники и автоматики, 2005. – 64 с.