

УДК 533 (075.8), 519.6

**ОБ АЛГОРИТМЕ МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ ДЛЯ РАСЧЕТА
СЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В РАМКАХ МОДЕЛИ
НАВЬЕ-СТОКСА В СЛУЧАЕ ПЛОСКОЙ
И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИЙ**

А.Б. Чечейбаев, Б. Чечейбаев, Н.Т. Эстебесова

Университет Центральной Азии, КГНУ им. Баласагына

Расчет вязких течений газа в рамках уравнений Навье-Стокса является эволюционной задачей математической физики [1]. Как известно, уравнения Навье-Стокса выводятся в предположении прямой пропорциональности тензора напряжений и тензора скоростей деформаций и справедливы для потоков со значительной вязкостью [1, 2 и др.]. Вместе с этим, в отличие от уравнений Эйлера для идеального газа, уравнения Навье-Стокса предъявляют высокие требования к мощности современных ЭВМ.

Одним из ярких методов современного вычислительного эксперимента является метод крупных частиц (МКЧ), разработанный крупным российским ученым, Почетным Академиком НАН Кыргызской Республики, Ю.М.Давыдовым [1, 2, 3 и др.]. С помощью данного метода успешно решаются сложные задачи гидродинамики, физики плазмы, механики экологии, машиностроения, механики сыпучих сред и др.

Рассмотрим задачу о расчете с помощью МКЧ течений вязкого теплопроводного газа в рамках уравнений Навье-Стокса. В случае

двумерной декартовой системы координат дифференциальная форма уравнений Навье-Стокса для расчета вязких сжимаемых течений газа состоит из уравнений неразрывности, импульса и энергии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u E}{\partial x} + \frac{\partial \rho v E}{\partial y} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot u + \right. \\ &+ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) v + \mu \frac{\partial}{\partial x} (B \cdot J + u^2) \left. \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) v + \right. \\ &+ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) u + \mu \frac{\partial}{\partial y} (B \cdot J + v^2) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

где μ - первый коэффициент вязкости, $\lambda = A \cdot \mu$ - второй коэффициент вязкости, для элементарной модели одноатомного газа принимаем, что $A = -\frac{2}{3}$; $B = \frac{\gamma}{Pr}$, Pr - число Прандтля; $E = J + \frac{1}{2} \cdot (u^2 + v^2)$. Здесь ρ , u , v , J , E , p - плотность, горизонтальная составляющая вектора скорости, вертикальная составляющая вектора скорости, удельная внутренняя энергия, удельная полная энергия и давление газа соответственно.

Для расчета динамической вязкости μ часто используется формула Сазерленда [2]:

$$\mu = \mu_0 \cdot \frac{T_0 + C}{T + C} \cdot \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (5)$$

μ - вязкость газа при температуре газа T , μ_0 - вязкость газа при температуре газа T_0 , C - постоянная Сазерленда. Для воздуха постоянные в уравнении (5) выглядят так: $C = 120 \text{ K}^0$, $T_0 = 291,15 \text{ K}^0$, $\mu_0 = 18,27 \text{ мкПа} \cdot \text{с}$.

В данной работе будем пренебрегать изменением вязкости. Систему уравнений (1) - (4) будем расщеплять методом крупных

частиц [1]. На эйлеровом этапе, пренебрегая дивергентными членами в системе (1) - (4), получаем следующую систему уравнений в частных производных:

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left[(A+2) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A+1) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right], \quad (6)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \left[(A+2) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A+1) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right], \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = & -\frac{\partial p u}{\partial x} - \frac{\partial p v}{\partial y} + \mu \left[(A+2) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. + A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B \left(\frac{\partial^2 J}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Перепишем уравнение энергии (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = & -\frac{\partial p u}{\partial x} - \frac{\partial p v}{\partial y} + \mu \left\{ (A+2) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. + A \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \right. \\ & \left. B \left(\frac{\partial^2 J}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \right) \right\}; \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда, заменяя в уравнениях (6), (7), (9) производные по времени и пространству соответствующими конечными разностями, получаем явные схемы эйлерова этапа метода крупных частиц. В методе крупных частиц для аппроксимации производных используются следующие конечные разности:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t}, \quad \Psi = \{u, v, E\} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x}, \quad \Psi = \{u, v, p, p u\} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{2 \cdot \Delta y}, \quad \Psi = \{u, v, p, p v\} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\Psi_{i+1,j}^n - 2 \cdot \Psi_{i,j}^n + \Psi_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2}, \quad \Psi = \{u, v, J\} \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\Psi_{i,j+1}^n - 2 \cdot \Psi_{i,j}^n + \Psi_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2}, \quad \Psi = \{u, v, J\} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\Psi_{i+1,j+1}^n - \Psi_{i-1,j+1}^n - \Psi_{i+1,j-1}^n + \Psi_{i-1,j-1}^n}{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y}, \quad \Psi = \{u, v\} \quad (16)$$

На эйлеровом этапе метода крупных частиц определяются промежуточные значения для энергии и составляющих вектора скорости.

На лагранжевом этапе МКЧ определяются потоки масс $\Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n, \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n, \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n, \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ через границы эйлеровых ячеек за время Δt . При расчете потоков масс целесообразнее использовать разностные формулы первого порядка точности.

На заключительном этапе МКЧ определяются новые значения величин плотности, скорости и удельной полной энергии:

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \frac{\sum \Delta M_k}{\Delta x \cdot \Delta y} = \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n - \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n + \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x \cdot \Delta y}, \quad (17)$$

$$X_{i,j}^{n+1} = \frac{\rho_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}} \tilde{X}_{i,j}^n + \frac{\tilde{X}_{i-1,j}^n \Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n - \tilde{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n + \tilde{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \tilde{X}_{i,j+1}^n \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \cdot \Delta x \cdot \Delta y}, \quad (18)$$

где $X = \{u, v, E\}$.

Рассмотрим теперь общую формулу для расчета уравнений движения вязкого теплопроводного газа в рамках гидродинамической модели Навье-Стокса [5, 6]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \Pi_{i,j}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E \vec{V}) = \frac{\partial Q}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{q} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} + \nabla \cdot (I, \quad (21)$$

где $\vec{q}$ – вектор плотности теплового потока, $\vec{f}$ – сила, отнесенная к единичной массе, $\Pi_{i,j}$ – составляющие тензора напряжений.

Переходя к цилиндрическим координатам, в случае осесимметричного потока получаем следующую систему уравнений:

$$r \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot u) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \rho \cdot v) = 0, \quad (22)$$

$$r \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot u^2 - r \cdot \tau_{rr}) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \rho \cdot u \cdot v - r \cdot \tau_{rz}) + \tau_{\varphi\varphi} + r, \quad (23)$$

$$r \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot u \cdot v - r \cdot \tau_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \rho \cdot v^2 - r \cdot \tau_{zz}) + r \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (24)$$

$$r \frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot u \cdot e - r \cdot q_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \rho \cdot v \cdot e - r \cdot q_z) +$$

$$+p \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot v) \right] = r \frac{d}{dt}, \quad (25)$$

где $p = (\gamma - 1) \cdot \dots$, $0.5 \leq$

$\Phi = \frac{\mu}{Re_{\infty}} \cdot \left\{ \frac{2}{3} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\}$ – диссипативная функция;

Здесь составляющие тензора напряжений и компоненты вектора теплового потока рассчитываются так:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= \frac{\mu}{Re_{\infty}} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right), & \tau_{zz} &= \frac{\mu}{Re_{\infty}} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ \tau_{\varphi\varphi} &= \frac{\mu}{Re_{\infty}} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{u}{r} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right), & \tau_{rz} &= \frac{\mu}{Re_{\infty}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

$$q_r = \frac{\gamma}{Pr}, \quad q_z = \frac{\gamma}{Pr}, \quad (27)$$

Соотношения для безразмерных коэффициентов – чисел Рейнольдса и Прандтля выглядят так: $Re_{\infty} = \dots$, $Pr = \dots$

где $\dots$ – отношение коэффициентов теплоемкостей газа при постоянном давлении и объеме. Для воздуха обычно принимается, что $\gamma = \dots$

Для решения системы (22) - (25) методом крупных частиц необходимо провести ее расщепление на две отдельные системы уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0, \quad (26)$$

$$r \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot (\tau_{rr})_1) - \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot (\tau_{rz})_1) + (\tau_{\varphi\varphi})_1 + r \frac{\partial p_1}{\partial r} = 0, \quad (27)$$

$$r \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot (\tau_{rz})_1) - \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot (\tau_{zz})_1) + r \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0, \quad (28)$$

$$r \rho_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot (q_r)_1) - \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot (q_z)_1) + p_1 \left[\frac{\partial}{\partial r} (r u_1) + \frac{\partial}{\partial z} (r v_1) \right] = r \frac{dQ_1}{dt} + r \Phi_1 \quad (29)$$

$$r \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho_1 \cdot u_1) = 0, \quad (30)$$

$$r \frac{\partial (\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho_1 \cdot (u_1)^2) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \rho_1 \cdot u_1 \cdot v_1) = 0, \quad (31)$$

$$r \frac{\partial (\rho_2 v_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho_1 \cdot u_1 \cdot v_1) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \rho_1 \cdot (v_1)^2) = 0, \quad (32)$$

$$r \frac{\partial(\rho_2 \varepsilon_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho_1 \cdot u_1 \cdot e_1) + \frac{\partial}{\partial z} (r \cdot \rho_1 \cdot v_1 \cdot e_1) = 0 \quad (33)$$

На эйлеровом этапе метода крупных частиц решается система уравнений (26) – (29). При аппроксимации данной системы разностными схемами используются элементарные разности (10) – (12).

Далее, на промежуточном и лагранжевом этапах, используя найденные на эйлеровом этапе распределения для ρ , u , v , в системе (30) – (33), аналогично случаю решения системы уравнений (1) – (4), определяем новые распределения плотности, скорости и энергии для следующего момента времени $t = t + \Delta t$.

Авторами данной статьи в настоящее время проводится программная реализация метода крупных частиц на М-языке системы программирования MATLAB для проведения расчетов движения теплопроводного газа в рамках уравнений Навье-Стокса в случае декартовой и цилиндрической систем координат.

В случае декартовой системы координат проводится расчет обтекания вязким газом двух прямоугольных препятствий - задачи, актуальной для оценки проветривания воздухом различных жилищных зданий.

В случае цилиндрической геометрии проводится расчет динамики вязкого теплопроводного газа внутри цилиндрической трубы - задачи, актуальной для проблем трубопроводной транспортировки газа.

Результаты проведенных численных расчетов будут опубликованы в следующих работах авторов данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. - М.: Наука, 1982. - 392 с.

2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1987.-840 с.
3. Давыдов Ю.М. Крупных частиц метод. – В кн.: Математическая энциклопедия. Т. 3. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – С. 125-129.
4. Yuri M. Davydov. Large-Particle Method. - In.: Encyclopaedia of Mathematics, vol.5. -Dordrecht/Boston/London: Kluwer academic publishers, 1990, p.p. 358-360.
5. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1: пер. С англ. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
6. Шайдуров В.В., Щепановская Г.И. Математическое моделирование нестационарного распространения импульса энергии большой мощности в вязком теплопроводном газе // Вычислительные технологии. - 2001. - Т. 6. - Ч. 2. - Спец. выпуск. - С. 693–698.