

УДК 532.546

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ИЗМЕНЕНИЯ ГЛУБИНЫ ОПОЛЗНЕВОГО ГОРНОГО СКЛОНА

Турсунова Б.К., Токтогулова А.Ш., Орозобекова А.К

КГУСТА им. Н. Исанова, КГТУ им. И. Раззакова

В последние годы на территории Кыргызстана, широкое развитие получили оползневые процессы, причем, в основном происходят такие формы оползневых явлений, как оползни течения, оползни гидродинамического разрушения и оползни внезапного разжижения. Анализ показывает, что геологические условия и рельеф местности являются необходимым условием возникновения оползневых процессов. Здесь, кроме необходимого условия формирования этих трех типов оползневых явлений, первостепенное значение имеют такие достаточные условия, как гидрогеологические и метеорологические процессы, под действием которых происходят перемещения оползней, их можно объединить и назвать гидрометеорологическими условиями. А вышеуказанные три формы оползневых процессов, которые производят перемещения под действием гидрометеорологических условий будем называть «оползнями гидродинамического происхождения».

Изучение оползней гидродинамического происхождения и борьба с ними имеют важное народнохозяйственное значение, и привлекает внимание большого круга специалистов.

Шайдеггер А.Е., детально анализирующий процессы формирования склонов (в том числе и горных склонов) водными потоками, указывал, что «...если склон состоит из тех же пород, частицы которых переносит по нему вода, тогда в первом приближении процесс формирования склона определяется зависимостью между скоростью течения, и транспортирующей способностью потока. Если поток несет меньше наносов (мелких частиц), чем позволяет его транспортирующая способность, то он будет добирать их с нижележащих участков склона и тем самым эродировать (размывать и разрушать) склон».

Далее, он отмечает, что скорость движения твердых частиц пропорциональна уклону ($\frac{\partial h}{\partial x}$), а отложение наносов пропорционально градиенту скорости движения твердых частиц.

Данный процесс А.Е. Шайдеггер описывает следующим дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (1)$$

Здесь h - глубина потока; a - произвольная постоянная.

Вслед за А. Е. Шайдеггером, А. С. Девдариани, а также А.М. Трофимов, В.М. Московкин и другие, считают, что в общем виде коэффициент a является функцией от расстояния: $a = a(x)$ и ими же дано решение одной краевой задачи:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_0 x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (2)$$

со следующими граничными и начальными условиями:

$$h(l; t) = 0; \quad h(x; 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l,$$

данная краевая задача соответствует случаю развития склона под действием плоскостного смыва (когда при выпадении на склон осадков расход воды возрастает линейно вниз по склону).

Используем данный подход исследования для изучения изменения глубины оползневого потока. При этом выдвигаются следующие модели функций изменения глубины оползневого потока, представленные в виде начально-краевых задач:

$$I. \quad \frac{\partial h}{\partial t} = ax^k \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad \text{где } k = 0; 1 \quad (3)$$

при следующих начальных и краевых условиях:

а) начальные условия:

$$\text{при } t = t_0, \quad h(x; t_0) = h(x) \quad (4)$$

б) граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } x = x_0 = 0, \quad h(0; t) &= q \\ \text{при } x = x_n, \quad h(x_n; t) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Следует отметить, что при $k = 0$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (5a)$$

а при $k = 1$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = ax \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (5б)$$

Для решения уравнения (3) с краевыми условиями (4) и (5) применяем метод нахождения автомодельных решений дифференциальных уравнений. Решение будем искать в автомодельной форме:

$$h(x; t) = x^n f(z), \quad (6)$$

здесь $z = \frac{t}{x^2}$, при $k=0$ и $z = \frac{t}{x}$ при $k=1$, n - показатель автомодельности.

Подставляя данное решение в уравнение (3) и после ряда преобразований получим:

$$z^2 f''(z) + (m_0 + a_0 z) f'(z) + b_0 f(z) = 0 \quad (7)$$

Здесь:

1) при $k=0$; $(z = \frac{t}{x^2})$;

$$a_0 = -\frac{1}{2}(2n-3); \quad b_0 = \frac{1}{4}n(n-1); \quad m_0 = -\frac{1}{4a}; \quad (8)$$

2) при $k=1$ $(z = \frac{t}{x})$;

$$a_0 = 2(1-n); \quad b_0 = n(n-1), \quad m_0 = -\frac{1}{a} \quad (9)$$

С целью преобразования решение уравнения (17) ищем в виде:

$$f(z) = e^{-\xi} \xi^\nu \nu(\xi), \quad \text{где} \quad \xi = z^{-1} \quad (10)$$

тогда получим:

$$\xi^2 \eta''(\xi) + [2\nu + 2 - a_0 - (2 + m_0)\xi] \xi \cdot \eta'(\xi) + \\ + [(1 + m_0)\xi - 2\nu - 2 + a_0 - m_0\nu] \xi + [\nu^2 + (1 - a_0)\nu + b_0] \cdot \eta(\xi) = 0 \quad (11)$$

Отсюда, допускаем, что выполнялось соотношение:

$$\nu^2 + (1 - a_0)\nu + b_0 = 0 \quad (12)$$

Решением данного уравнения являются следующие (где учитываются (8) и (9)) выражения:

$$1) \text{ при } k=0; (z = \frac{t}{x^2}); \quad \nu_1 = \frac{1-n}{2}, \quad \nu_2 = -\frac{n}{2} \quad (13)$$

$$2) \text{ при } k=1; (z = \frac{t}{x}); \quad \nu_1 = 1-n; \quad \nu_2 = -n$$

(14)

Согласно соотношению (12), уравнение (11) примет вид:

$$\xi \cdot \eta''(\xi) + [2\nu + 2 - a_0 - (2 + m_0)\xi] \cdot \eta'(\xi) + \\ + [(1 + m_0)\xi - (2\nu + 2 - a_0 + m\nu)] \cdot \eta(\xi) = 0 \quad (15)$$

Уравнение (15) при $m_0 = -1$ (или то же самое, что $a = \frac{1}{4}$, когда $k=0$ и $a = 1$, когда $k = 1$) приводится к уравнению следующего вида:

$$\xi \eta''(\xi) + [2\nu + 2 - a_0 - \xi] \cdot \eta'(\xi) - (\nu + 2 - a_0) \cdot \eta(\xi) = 0 \quad (16)$$

Итак, мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Теперь, сопоставляя уравнение (16) с вырожденным гипергеометрическим уравнением:

$$x \cdot y''(x) + (c - x) \cdot y'(x) - a \cdot y(x) = 0 \quad (17)$$

имеем следующие два вида уравнения (16), которые имеют следующие формы:

1) при $k=0$ уравнение (1) примет вид (5а), тогда, согласно искомого решения (6) и преобразования (10), а также (8), уравнение (16) будет иметь вид:

$$\xi \cdot \eta''(\xi) + \left[2\nu + n + \frac{1}{2} - \xi \right] \cdot \eta'(\xi) - (\nu + n + \frac{1}{2}) \cdot \eta(\xi) = 0 \quad (18)$$

или с учетом значения « ν » из соотношения (13) имеем:

а) при $\nu_1 = \frac{1-n}{2}$ получится:

$$\xi \cdot \eta''(\xi) + \left[\frac{3}{2} - \xi \right] \cdot \eta'(\xi) - \frac{n+2}{2} \cdot \eta(\xi) = 0 \quad (19)$$

отсюда

$$\eta(\xi) = C_1 \cdot \Phi\left(\frac{n+2}{2}; \frac{3}{2}; \xi\right) + C_2 \cdot \xi^{-\frac{1}{2}} \Phi\left(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; \xi\right) \quad (20)$$

$$\left(\xi = \frac{x^2}{t}\right)$$

б) при $\nu_2 = -\frac{n}{2}$:

$$\xi \cdot \eta''(\xi) + \left[\frac{1}{2} - \xi \right] \cdot \eta'(\xi) - \frac{n+1}{2} \cdot \eta(\xi) = 0 \quad (21)$$

отсюда

$$\eta(\xi) = C_1 \cdot \Phi\left(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; \xi\right) + C_2 \cdot \xi^{\frac{1}{2}} \Phi\left(\frac{n+2}{2}; \frac{3}{2}; \xi\right) \quad (22)$$

$$(\xi = \frac{x^2}{t})$$

Теперь будем учитывать соотношение (10) и получим:

$$1. \text{ при } \nu_1 = \frac{1-n}{2}$$

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} z^{\frac{n}{2}} (C_{01} z^{-\frac{1}{2}} \cdot \Phi(\frac{n+2}{2}; \frac{3}{2}; z^{-1}) + C_{02} \Phi(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; z^{-1})) \quad (23)$$

$$2. \text{ при } \nu_2 = -\frac{n}{2} \text{ получится:}$$

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} z^{\frac{n}{2}} (C_{01} \cdot \Phi(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; z^{-1}) + C_{02} \cdot z^{-\frac{1}{2}} \Phi(\frac{n+2}{2}; \frac{3}{2}; z^{-1})) \quad (24)$$

Таким образом, получены две формы решения в виде (23) и (24), сравнивая их между собою окончательно имеем:

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} z^{\frac{n}{2}} (C_1 z^{-\frac{1}{2}} \cdot \Phi(\frac{n+2}{2}; \frac{3}{2}; z^{-1}) + C_2 \Phi(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; z^{-1})), \quad z = \frac{t}{x^2} \quad (25)$$

Тогда согласно формуле (6) функция изменения глубины оползневого потока будет иметь вид:

$$h(x,t) = e^{-\frac{x^2}{t}} t^{\frac{n}{2}} (C_1 \cdot \Phi(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{t}) + C_2 \cdot \frac{x}{t^{\frac{1}{2}}} \Phi(\frac{n+2}{2}; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{t})) \quad (26)$$

Аналогично поступим и относительно второго уравнения:

2) при $k=1$, уравнение (3) примет вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a x \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (5 б)$$

Отсюда на основании формулы (6) и преобразования (10) с учетом соотношения (9) получим:

$$\xi \cdot \eta''(\xi) + [2\nu + 2n - \xi] \cdot \eta'(\xi) - (\nu + 2n) \cdot \eta(\xi) = 0 \quad (27)$$

Теперь с учетом значения « ν » из формулы (14) будем иметь следующее:

а) $\nu_1 = 1-n$, тогда уравнение (27) примет вид:

$$\xi \cdot \eta''(\xi) + [2 - \xi] \cdot \eta'(\xi) - (n+1) \cdot \eta(\xi) = 0 \quad (28)$$

При этом решением уравнения (28) будет

$$\eta(\xi) = C_1 \cdot \Phi(n+1; 2; \xi) \quad (29)$$

Здесь второе независимое решение содержит логарифмические члены, поэтому достаточно иметь одно решение данного гипергеометрического уравнения (28). И в этом случае будет одно единственное решение в виде (29), тогда имеем:

$$f(z) = C_1 e^{-\frac{1}{z}} z^{n-1} \Phi(n+1; 2; z^{-1}) \quad , \quad z = \frac{t}{x} \quad (30)$$

или нетрудно получить:

$$h(x; t) = C_1 e^{-\frac{x}{t}} x \cdot t^{n-1} \Phi(n+1; 2; \frac{x}{t}) \quad (31)$$

б) $v_2 = -n$, тогда из уравнения (27) получим: $2v + 2n = 0$ и $v + 2n = n$,

При этом здесь

$$\Phi_1(n; 0; \xi) \text{ и } \Phi_2(\xi) = \xi \Phi(n+1; 2; \xi),$$

тогда решением гипергеометрического уравнения (27) будет следующее.

При $v_1 = -n$ будет иметь вид:

$$\eta(\xi) = C_0 \xi \cdot \Phi(n+1; 2; \xi),$$

в этом случае имеем

$$f(z) = C_0 e^{-\frac{1}{z}} z^{n-1} \Phi(n+1; 2; z^{-1})$$

такого же вида, что и (2.40). Поэтому, решением уравнения (6) является (31).

$$\text{II. } \frac{\partial h}{\partial t} = (ax^2 + bx + c)^s \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (32)$$

при следующих начально-краевых условиях:

а) начальные условия:

при $t = t_0$

$$h(x; t_0) = h_0(x) \quad (33)$$

б) граничные условия:

при $x = x_0 = 0$, $h(0; t) = q$,

при $x = x_n$, $h(x_n; t) = 0$ (34)

Решения уравнения (32) с начально-краевыми условиями (33) и (34) будем представлять в автомодельной форме следующего вида:

$$h(x; t) = (ax^2 + bx + c)^n \cdot f(z), \quad z = \frac{t}{(2ax + b)^m} \quad (35)$$

n — показатель автомодельности, a , b , c — произвольные постоянные.

Подставляя данное решение (35) в уравнение (32) после ряда преобразований получим:

$$z^2 f''(z) + (a_0 + b_0 z) \cdot f'(z) + c_0 f(z) = 0 \quad (36)$$

здесь

$$a_0 = -\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}, \quad b_0 = -2(2n-1); \quad c_0 = 2n(2n-1) \quad (37)$$

при этом допустим, что $s = 1/2$ и $m = 1$

Для дальнейшего упрощения полагаем:

$$f(z) = e^{-y} y^{-\nu} \cdot \eta(y); \quad y = z^{-1} \quad (38)$$

тогда получаем:

$$y^2 \eta''(y) + [2(\nu+1) - b_0 - (a_0 + 2) \cdot y] \cdot y \cdot \eta'(y) + [\nu(\nu+1) - b_0 \nu + c_0 + (1 + a_0) \cdot y^2 + (b_0 - 2\nu - 2 - a_0 \nu) \cdot y] \cdot \eta(y) = 0 \quad (39)$$

Предположим, что выполнялось соотношение:

$$\nu \cdot (\nu + 1) - b_0 \cdot \nu + c_0 = 0 \quad (40)$$

Решениями уравнения являются следующие:

$$\nu_{1,2} = -\frac{1-b_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(1-b_0)^2}{4} - c_0\right)}$$

или с учетом соотношения (37) имеем:

$$\nu_1 = 1 - 2n, \quad \nu_2 = -2n; \quad (41)$$

Далее, на основании (40) уравнение (39) преобразуется в форме:

$$y\eta''(y) + [2(\nu + 1) - b_0 - (a_0 + 2) \cdot y] \cdot \eta'(y) + [(1 + a_0) \cdot y + b_0 - 2\nu - 2 - a_0 \cdot \nu] \cdot \eta(y) = 0 \quad (42)$$

Допустим, что $a_0 = \frac{-1}{2a^{\frac{3}{2}}} = -1$ или $a^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$, тогда уравнение (42) примет

следующий вид:

$$y\eta''(y) + [2(\nu + 1) - b_0 - y] \cdot \eta'(y) - (\nu + 2 - b_0) \cdot \eta(y) = 0 \quad (43)$$

Таким образом, нами получено вырожденное гипергеометрическое уравнение, решениями которого являются вырожденные гипергеометрические функции, одно из которых имеет следующую форму:

$$\eta_1(y) = \phi(\alpha, \beta, y)$$

Тогда при $\nu_1 = 1 - 2n$ имеем

$$\eta(y) = c_1 \phi(2n + 1; 2; y) \quad (44)$$

Второе независимое решение выражается через логарифмическое выражение, поэтому его не будем рассматривать. Согласно формуле (38) получим:

$$f(z) = c_1 e^{-\frac{1}{z}} z^{2n-1} \phi(2n + 1; 2; z^{-1}) \quad (45)$$

при $\nu_2 = -2n$ получится: $\alpha = 2n$; $\beta = 0$, при этом также имеется только одно независимое решение в форме

$$\eta(y) = c_2 y^{1-\beta} \phi(\alpha - \beta + 1; 2 - \beta; y)$$

или

$$\eta(y) = c_2 y \phi(2n + 1; 2; y) \quad (46)$$

Здесь также на основании формулы (1.48) имеем:

$$f(z) = c_2 e^{-\frac{1}{z}} z^{2n-1} \phi(2n+1; 2; y) \quad (47)$$

Итак, окончательно получится одно независимое решение в виде:

$$f(z) = c_1 e^{-\frac{1}{z}} z^{2n-1} \phi(2n+1; 2; y) \quad (48)$$

Тогда согласно формуле функция изменения глубины оползневого потока будет иметь вид:

$$h(x, t) = c_0 t^{2n-1} \cdot (2ax + b) \cdot e^{-\frac{2ax+b}{t}} \phi(2n+1; 2; \frac{2ax+b}{t}) \quad (49)$$

Таким образом, мы формы изменений глубины оползневого потока. Отсюда следует, что изменение глубины оползневого потока связного типа имеют различные формы в зависимости от формы уравнения и значения показателя автомодельности « n ». Поэтому, задавая различные значения показателя автомодельности « n », мы получим различные формы для функций $f(z)$ и $h(x, t)$ для разных видов уравнений, описывающих изменение глубины оползневых потоков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оползни//БСЭ. 3-е изд. - М. 1974. - Т. 18. - С. 429-430
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. - М.: Изд-во физико-математической литературы, 1963. Т. 1. - 575 с.
3. Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. -420 с.
4. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. - М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2001. — 608 с.

5. Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов. М.: Изд-во МГУ, 1997. -178 с.
6. Емельянова Е.П. Основные закономерности оползневых процессов. М.: Недра, 1972.-308 с.
7. Численные методы в динамике жидкостей/Джеймсон Э., Мюллер Т., Боллха-уз У., Краус В., Шмидт В., Белоцерковский О.; ред. Вирц Г., Смолдерен Ж. М.: Мир, 1981.-407 с.
8. Шадунц К.Ш. Расчет скоростей движения оползней-потоков//Геологические факторы формирования оползней и селевых потоков и вопросы их оценки. — 1976. — С. 4-12
9. Шайдеггер А.Е. Теоретическая геоморфология. М.: Прогресс, 1964 г.
10. Бийбосунов А.И., Орозобекова А.К., Ташиев А.А. Механико-математическая модель глубины селевых потоков. Современные проблемы механики сплошных сред/ Гидрогазодинамика и экзогенно-геологические процессы природы. Б., 2004 г., с. 28-37