

УДК 517.968

**ИССЛЕДОВАНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ И
ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЯМ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЧВЫ
ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ**

Р. Табышов, М.Ж.Нарматова, Ш.К. Шейшенова

НИИЭЭ при МЭ КР, ИСРиП

Как известно, в почве естественного сложения первопричинного процесса теплообмена является наблюдающийся всегда и повсеместно вертикальный температурный перепад меняющий знак от дня к ночи. Благодаря этому возникает процесс теплопроводности, обуславливающий обмен теплом внутри почвы между различными глубинами.

Для нахождения температурного поля в почве, где действуют основные факторы процесса, к которым относятся: кондуктивная теплопроводность, конвекция в порах почвы, излучения в порах, перенос влаги, является задачей исключительной сложности. Основным и эффективным средством, позволяющим обойти эти сложности и успешно решать многие практические задачи, может служить двумерная модель уравнения эквивалентной теплопроводности [1].

$$c(x, y, t) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x, y, t) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(x, y, t) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (1)$$

Уравнение (1) является нелинейным двумерным дифференциальным уравнением теплопроводности и нахождение его решений довольно

сложно. Коэффициенты теплопроводности и теплоемкости имеют сложную зависимость от переменных x, y, t , а возможно и от самой функции T . Существуют различные виды экспериментальных зависимостей, а также линеаризация этих зависимостей [3].

Для исследования последнего нелинейного уравнения теплопроводности, подставив следующие начально-краевые условия:

$$\begin{cases} T(x, y, 0) = F_0(x, y), \\ T(0, y, t) = F_1(y, t), \\ T(H, y, t) = F_2(y, t) \end{cases} \quad (2)$$

При решении нелинейного уравнения (1), вся трудность заключалась именно в определении коэффициентов теплоемкости $c(x, y, t)$ и теплопроводности $\lambda(x, y, t)$, и как указано выше, они определялись из экспериментальных данных или, зная законы их изменения, приближенно вышеуказанные характеристики описывались определенными количественными зависимостями от x, y и t .

I. Пусть коэффициенты $c(x, y, t)$ и $\lambda(x, y, t)$ подчинены одинаковым законам изменения – экспоненциальным как:

$$c(x, y, t) = c_0 e^{\gamma T} \quad \lambda(x, y, t) = \lambda_0 e^{\gamma T} \quad (3)$$

тогда подставляя их в уравнения (1), после некоторых математических преобразований, получим следующее нелинейное уравнение:

$$T_\tau = T_{xx} + T_{yy} + \gamma(T_x^2 + T_y^2), \quad \text{где } \tau = \frac{\lambda_0}{c_0} t \quad (4)$$

Введем новую зависимую функцию в виде:

$$Q = \exp \gamma T \quad (5)$$

Определяя частные производные

$$\begin{aligned} Q_t &= \gamma e^{\gamma T} T_t, \quad Q_x = \gamma e^{\gamma T} T_x, \\ Q_{xx} &= \gamma e^{\gamma T} (\gamma T_x^2 + T_{xx}), \quad Q_y = \gamma e^{\gamma T} T_y, \quad Q_{yy} = \gamma e^{\gamma T} (\gamma T_y^2 + T_{yy}) \end{aligned}$$

и подставляя в (4), получим линейное уравнение в частных производных второго порядка:

$$Q_t = Q_{xx} + Q_{yy}, \quad (6)$$

1) Предположим, что уравнение (6) имеет решение в классической форме:

$$Q(x, y, \tau) = f_0(x)f_1(y)f_2(\tau) \quad (7)$$

Определяя частные производные и подставляя в исследуемое уравнение имеем следующее соотношение:

$$f_0(x)f_1(y)f_2'(\tau) = f_0''(x)f_1(y)f_2(\tau) + f_0(x)f_1''(y)f_2(\tau) \quad (8)$$

Пусть $f_0(x) = \exp kx$, $f_1(y) = \exp my$ тогда разделяя уравнение (8) на произведение функций $f_0(x)f_1(y)$, получим:

$$f_2'(\tau) = (k^2 + m^2)f_2(\tau), \quad (9)$$

общим решением которого будет

$$f_2(\tau) = c_0 \exp(k^2 + m^2)\tau, \quad (10)$$

а сама искомая функция окончательно запишется следующим образом:

$$Q(x, y, \tau) = c_0 \exp kx \cdot \exp my \cdot \exp(k^2 + m^2)\tau \quad (11)$$

2) Предположим, что решение уравнения (6) можно искать в другой форме:

$$Q(x, y, \tau) = f_0(x)f_1(y)f_2(\eta), \quad \eta = x + y + c\tau - \text{плоская волна} \quad (12)$$

Определяя $Q_\tau, Q_x, Q_{xx}, Q_y, Q_{yy}$ и подставляя их в уравнение (6), получим дифференциальное уравнение, которое после деления на произведение $f_0(x) = \exp nx$, $f_2(\eta) = \exp \eta$, записывается в виде обыкновенного дифференциального уравнения:

$$f_1''(y) + (n^2 - c)p f_1(y) = 0 \quad (13)$$

где его решением будет $f_1(y) = c_0 \exp(\sqrt{(c - n^2)p})y + c_1 \exp(-\sqrt{(c - n^2)p})y$,

при этом сама искомая функция запишется:

$$Q(x, y, \tau) = \exp nx \cdot \exp p\eta \cdot [c_0 \exp(\sqrt{(c - n^2)p})y + c_1 \exp(-\sqrt{(c - n^2)p})y] \quad (14)$$

3) Теперь будем искать решение уравнения (6) в более сложном виде:

$$Q(x, y, \tau) = f_0(x)f_1(y)[f_2(\eta) + f_3(\tau)], \quad \eta = x + y + c\tau \quad (15)$$

Здесь также определяя все частные производные и подставляя в (6), имеем:

$$f_0 f_1 [cf_2' + f_3'] = f_0'' f_1 [f_2 + f_3] + 2f_0' f_1 f_2' + 2f_0 f_1 f_2'' + f_0 f_1'' [f_2 + f_3] + 2f_0 f_1' f_2' \quad (16)$$

Пусть $f_0(x) = \exp bx$, $f_1(y) = \exp ty$, тогда разделяя уравнение (16) на произведение функций $f_0(x)$, $f_1(y)$, получим систему из двух уравнений

$$\text{а) } f_3' - (b^2 + m^2)f_3 = 0, \quad \text{б) } f_2'' + (2m + 2b - c)f_2' + (b^2 + m^2)f_2 = 0$$

Из первого уравнения определим

$$f_3(\tau) = c_0 \exp(b^2 + m^2)\tau \quad (17)$$

Из второго уравнения, записанного в виде обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$2f_2'' + (2m + 2b - c)f_2' + (b^2 + m^2)f_2 = 0 \quad (18)$$

определим его решение, зная, что его характеристическое уравнение имеет корни вида

$$k_{1,2} = \frac{-(2m+2b-c) \pm \sqrt{(2m+2b-c)^2 - 8(b^2+m^2)}}{4} \quad (19)$$

Здесь возможны три случая:

а) корни действительны и различны, тогда общее решение имеет вид

$$f_2(\eta) = c_1 \exp k_1 \eta + c_2 \exp k_2 \eta \quad (20)$$

в этом случае искомая функция записывается как

$$Q(x, y, \tau) = \exp bx \cdot \exp ty \cdot [c_1 \exp k_1 \eta + c_2 \exp k_2 \eta + c_0 \exp(b^2 + m^2)\tau] \quad (21)$$

б) корни кратные, тогда

$$f_2(\eta) = (c_1 + c_2 \eta) \exp k \eta \quad (22)$$

а сама функция $Q(x, y, \tau)$ окончательно имеет вид

$$Q(x, y, \tau) = \exp bx \cdot \exp ty \cdot [(c_1 + c_2 \eta) \exp k \eta + c_0 \exp(b^2 + m^2)\tau] \quad (23)$$

в) корни комплексные, т.е. $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, тогда получим решение

$$f_2(\eta) = \exp \alpha \eta (c_1 \cos \beta \eta + c_2 \sin \beta \eta) \quad (24)$$

При этом искомая функция принимает вид

$$Q(x, y, \tau) = \exp bx \cdot \exp ty \cdot [\exp a\eta (c_1 \cos \beta \eta + c_2 \sin \beta \eta) + c_0 \exp(b^2 + m^2)\tau] \quad (25)$$

Предположим, что коэффициенты теплопроводности и теплоемкости, определенные из экстремальных данных могут быть записаны как

$$C(x, y, \tau) = c_0 T^n, \quad \lambda(x, y, \tau) = \lambda_0 T^m,$$

тогда уравнение (1) запишется в виде

$$T^{\tau-m+1} T_\tau = T(T_{xx} + T_{yy}) + m(T_x^2 + T_y^2) \quad (26)$$

Уравнение (26) будет нелинейным при любом $n \neq m$ а также если:

$$\text{а) } n < m \text{ на единицу} \quad T_\tau = TT_{xx} + TT_{yy} + 2(T_x^2 + T_y^2), n = 1, m = 2 \quad (27)$$

$$\text{б) } n > m \text{ на единицу} \quad T^2 T_\tau = TT_{xx} + TT_{yy} + T_x^2 + T_y^2, n = 2, m = 1 \quad (28)$$

в) при $n = m = 1$ уравнение может записаться в виде

$$TT_\tau = TT_{xx} + TT_{yy} + T_x^2 + T_y^2 \quad (29)$$

или с привлечением функции

$$Q(x, y, \tau) = T^2(x, y, \tau), \quad (30)$$

получим следующее линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$Q_\tau = Q_{xx} + Q_{yy}, \quad (31)$$

эквивалентное уравнению (6) по структуре, но неравное ему по значению.

Определим решение уравнения (31) в автомодельной форме (2)

$$Q(x, y, \tau) = \tau^n f(\xi), \quad \xi = -\frac{(x+y)^2}{8\tau} \quad (32)$$

Определяя частные производные: $Q_\tau = n \cdot \tau^{n-1} \cdot f(\xi) - \tau^{n-1} \cdot f' \cdot \xi$,

$$Q_{xx} = 4a\tau^{n-1}\xi f'' + 2a\tau^{n-1}f', \quad Q_{yy} = 4a\tau^{n-1}\xi f'' + 2a\tau^{n-1}f'$$

и подставляя в рассматриваемое уравнение (31), получим

$$\xi f'' + \left[\frac{1}{2} - \xi\right] f' + nf = 0, \quad (33)$$

которое является вырожденным гипергеометрическим уравнением Гаусса, имеющее два класса частных решений (2)

$$f(\xi) = c_1 F\left(-n; \frac{1}{2}; \xi\right) + c_2 \xi^{1/2} F\left(\frac{-2n+1}{2}; \frac{3}{2}; \xi\right) \quad (34)$$

где
$$F(\xi) = 1 - 2n\xi - \frac{2n(-n+1)}{3}\xi^2 + \dots + \frac{(-n+R-1)\xi^R}{\left(R - \frac{1}{2}\right)R!} + \dots$$

Это функция Похгаммера или вырожденная гипергеометрическая функция, представленная с помощью ряда, сходящегося при всех значениях ξ .

С учетом решения (32), общее решение имеет вид:

$$Q(x, y, \tau) = \tau^n \left[c_1 F\left(-n; \frac{1}{2}; \xi\right) + c_2 \xi^{1/2} F\left(\frac{-2n+1}{2}; \frac{3}{2}; \xi\right) \right] \quad (35)$$

Таким образом, рассмотренные два вида лидеризации уравнения (1), которые позволяют аналитически решить сложную задачу распространения тепла в почвогрунте с различными ее теплофизическими характеристиками. Сравнивая, полученные решения (35) с начально-краевыми условиями (2), если они будут записаны в явном виде, тогда можем определить постоянные интегрирования c_1, c_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Чудновский А.Ф. Теплообмен в дисперсных средах. Л., Гостехиздат 1954г, 444с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976г., 576с.
3. Куртнер Д.А., Решетин О.Л., Чудновский А.Ф. Решение уравнения теплопроводности при переменном коэффициенте переноса. // Сб. трудов по агроном. физике. 1970г., №26.-с.71-79.