

УДК: 519.622(045/046)

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДАМ ЭЙЛЕРА.**

М.М.Султанова

Бишкекский колледж компьютерных систем и технологий.

Как известно, решение дифференциальных уравнений является сложной задачей и метод Эйлера в настоящее время одним из наиболее употребительных методов для решения дифференциальных уравнений. Главным его достоинством является очень быстрая сходимость последовательных приближений к точному решению.

Метод Эйлера относится к численным методам, дающим решение в виде таблицы приближенных значений искомой функции $y(x)$. Он является сравнительно грубым и применяется в основном для ориентировочных расчетов. Однако идеи, положенные в основу метода Эйлера, являются исходными для ряда других методов.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

с начальным условием

$$x = x_0, y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

Требуется найти решение уравнения (1) на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей и получим последовательность $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, где $x_i = x_0 + ih$ ($i=0, 1, \dots, n$), а $h = (b-a)/n$ - шаг интегрирования.

В методе Эйлера приближенные значения $y(x_i) \approx y_i$ вычисляются последовательно по формулам $y_i + hf(x_i, y_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots$).

При этом искомая интегральная кривая $y=y(x)$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется ломаной $M_0M_1M_2\dots$ с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots$); каждое звено M_iM_{i+1} этой ломаной, называемой **ломаной Эйлера**, имеет направление, совпадающее с направлением той интегральной кривой уравнения (1), которая проходит через точку M_i .

Если правая часть уравнения (1) в некотором прямоугольнике $R\{|x-x_0| \leq a, |y-y_0| \leq b\}$ удовлетворяет условиям:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2| \quad (N=\text{const}),$$

$$|df/dx| = |df/dx + f(df/dy)| \leq M \quad (M=\text{const}),$$

то имеет место следующая оценка погрешности:

$$|y(x_n) - y_n| \leq hM/2N[(1+hN)^n - 1], \quad (3)$$

где $y(x_n)$ -значение точного решения уравнения(1) при $x=x_n$, а y_n -приближенное значение, полученное на n -ом шаге.

Формула (3) имеет в основном теоретическое применение. На практике иногда оказывается более удобным двойной просчет: сначала расчет ведется с шагом h , затем шаг делят и повторный расчет ведется с шагом $h/2$. Погрешность более точного значения y_n^* оценивается формулой

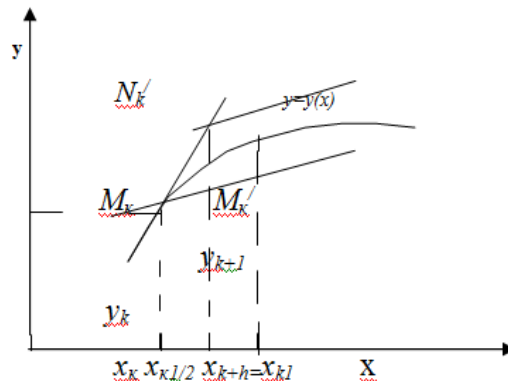
$$|y_n - y(x_n)| \approx |y_n^* - y_n|.$$

Метод Эйлера легко распространяется на системы дифференциальных уравнений и на дифференциальные уравнения высших порядков. Последние должны быть предварительно приведены к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Эйлером был предложен модифицированный метод для решения дифференциального уравнения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1) $y'=f(x,y)$ с начальным условием $y(x_0)=y_0$. Разобьем наш участок интегрирования

на n равных частей. На малом участке $[x_0, x_0+h]$ интегральную кривую заменим прямой линией. Получаем точку $M_k(x_k, y_k)$.



Через M_k проводим касательную: $y=y_k+f(x_k, y_k)(x-x_k)$.

Делим отрезок (x_k, x_{k+1}) пополам:

$$x'_{Nk}=x_k+h/2=x_{k+1/2}$$

$$y'_{Nk}=y_k+f(x_k, y_k)h/2=y_k+y_{k+1/2}$$

Получаем точку N'_k . В этой точке строим следующую касательную:

$$y(x_{k+1/2})=f(x_{k+1/2}, y_{k+1/2})=\alpha_k$$

Из точки M_k проводим прямую с угловым коэффициентом α_k и определяем точку пересечения этой прямой с прямой X_{k+1} . Получаем точку M'_k . В качестве y_{k+1} принимаем ординату точки M'_k . Тогда:

$$y_{k+1}=y_k+\alpha_k h$$

$$x_{k+1}=x_k+h$$

$$\alpha_k=f(x_{k+h/2}, y_k+f(x_k, Y_k)h/2) \quad (4)$$

$$y_k=y_{k-1}+f(x_{k-1}, y_{k-1})h$$

(4)-рекуррентные формулы метода Эйлера.

Сначала вычисляют вспомогательные значения искомой функции $y_{k+1/2}$ в точках $x_{k+1/2}$, затем находят значение правой части уравнения (1) в средней точке $y'_{k+1/2}=f(x_{k+1/2}, y_{k+1/2})$ и определяют y_{k+1} .

Для оценки погрешности в точке x_k проводят вычисления y_k с шагом h , затем с шагом $2h$ и берут $1/3$ разницы этих значений:

$$|y_k^*-y(x_k)|=1/3(y_k^*-y_k),$$

где $y(x)$ -точное решение дифференциального уравнения.

Таким образом, методом Эйлера можно решать уравнения любых порядков. Например, чтобы решить уравнение второго порядка $y''=f(y',y,x)$ с начальными условиями $y'(x_0)=y'_0$, $y(x_0)=y_0$, выполняется замена:

$$y'=z$$

$$z'=f(x,y,z)$$

Тем самым преобразуются начальные условия: $y(x_0)=y_0$, $z(x_0)=z_0$, $z_0=y'_0$.

Рассмотрим вопрос о применении метода Эйлера к дифференциальным уравнениям. Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y'=2x-y$$

Требуется найти решение на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h=(1-0)/5=0,2$

Начальные условия: $y_0=1$;

Пользуясь рекуррентными формулами (4), находим:

$$1). x_1=0,2; x_{1/2}=0,1; y(x_1)=y(x_0)+\alpha_0 h; y(x_{1/2})=y(x_0)+f(x_0,y_0)h/2;$$

$$f(x_0,y_0)=2*0-1=-1$$

$$y(x_{1/2})=1-1*0,1=0,9$$

$$\alpha_0=2*0,1-0,9=-0,7$$

$$y_1=1-0,1*0,2=\underline{0,86}$$

$$2). y(x_2)=y(x_1)+\alpha_1 h; x_2=0,2+0,2=0,4; x_{1+1/2}=x_1+h/2=0,2+0,1=0,3$$

$$y(x_{1+1/2})=y(x_1)+f(x_1,y(x_1))h/2$$

$$f(x_1,y_1)=2*0,2-0,86=-0,46$$

$$y(x_{1+1/2})=0,86-0,46*0,1=0,814$$

$$\alpha_1=2*0,3-0,814=-0,214$$

$$y_2=0,86-0,214*0,2=\underline{0,8172}$$

$$3). x_3=0,4+0,2=0,6; x_{2+1/2}=x_2+h/2=0,4+0,1=0,5$$

$$f(x_2,y_2)=2*0,4-0,8172=-0,0172$$

$$y_{2+1/2}=0,8172-0,0172*0,1=0,81548$$

$$\alpha_2 = 2 \cdot 0,5 - 0,81548 = 0,18452$$

$$y_3 = 0,8172 + 0,18452 \cdot 0,2 = \underline{0,854104}$$

$$4). x_4 = 0,8; \quad x_{3+1/2} = x_3 + h/2 = 0,6 + 0,1 = 0,7$$

$$f(x_3, y_3) = 2 \cdot 0,6 - 0,854104 = 0,345896$$

$$y_{3+1/2} = 0,854104 + 0,345896 \cdot 0,1 = 0,8886936$$

$$\alpha_3 = 2 \cdot 0,7 - 0,89 = 0,5113064$$

$$y_4 = 0,854104 + 0,5113064 \cdot 0,2 = \underline{0,95636528}$$

$$5). x_5 = 1; \quad x_{4+1/2} = 0,8 + 0,1 = 0,9$$

$$f(x_4, y_4) = 2 \cdot 0,8 - 0,956 = 0,64363472$$

$$y_{4+1/2} = 0,956 + 0,643 \cdot 0,1 = 1,020728752;$$

$$\alpha_4 = 2 \cdot 0,9 - 1,02 = 0,779271248$$

$$y_5 = 0,956 + 0,7792 \cdot 0,2 = \underline{1,11221953}$$

Рассмотрим уравнение второго порядка:

$$y'' = 2x - y + y'$$

Находим решение на том же отрезке $[0, 1]$ с шагом $h=0,2$;

Замена: $y' = z$

$$z' = 2x - y + z$$

Начальные условия: $y_0 = 1$

$$z_0 = 1$$

$$1). x_1 = 0,2; \quad x_{1/2} = 0,1$$

$$y(z_1) = y(z_0) + \alpha_0 h$$

$$z(x_1, y_1) = z(x_0, y_0) + \beta_0 h$$

$$y(z_{1/2}) = y(z_0) + f(z_0, y_0) h/2$$

$$z(x_{1/2}, y_{1/2}) = z(x_0, y_0) + f(x_0, y_0, z_0) h/2$$

$$f(z_0, y_0) = f_{10} = 1$$

$$f(x_0, y_0, z_0) = f_{20} = 2 \cdot 0 - 1 + 1 = 0$$

$$y_{1/2} = 1 + 1 \cdot 0,1 = 1,1$$

$$z_{1/2} = 1 + 0 \cdot 0,1 = 1$$

$$\alpha_0 = z_0 = 1$$

$$\beta_0 = 2 \cdot 0,1 - 1,1 + 1 = 0,1$$

$$y_1 = 1 + 0,2 \cdot 1 = \underline{1,2}$$

$$z_1 = 1 + 0,2 \cdot 0,1 = \underline{1,02}$$

$$2). x_2 = 0,4; \quad x_{1+1/2} = 0,3$$

$$f_{11} = z_1 = 1,02$$

$$f_{21} = 2 \cdot 0,2 - 1,2 + 1,02 = 0,22$$

$$y_{1+1/2} = 1,2 + 1,02 \cdot 0,1 = 1,1$$

$$z_{1+1/2} = 1,02 + 0,22 \cdot 0,1 = 1,042$$

$$\alpha_1 = z_{1+1/2} = 1,042$$

$$\beta_1 = 2 \cdot 0,3 - 1,302 + 1,042 = 0,34$$

$$y_2 = 1,2 + 1,042 \cdot 0,2 = \underline{1,4084}$$

$$z_2 = 1,02 + 0,34 \cdot 0,2 = \underline{1,088}$$

$$3). x_3 = 0,6; \quad x_{2+1/2} = 0,5$$

$f_{12}=z_2=1,088$	$f_{22}=2*0,4-1,4084+1,088=0,4796$
$y_{2+1/2}=1,4084+1,088*0,1=1,5172$	$z_{2+1/2}=1,088+0,4796*0,1=1,13596$
$\alpha_2=z_{2+1/2}=1,13596$	$\beta_2=2*0,5-1,5172+1,13596=0,61876$
$y_3=1,4084+1,136*0,2=\underline{1,635592}$	$z_3=1,088+0,61876*0,2=\underline{1,211752}$
4). $x_4=0,8$; $x_{3+1/2}=0,7$	
$f_{13}=z_3=1,211752$	$f_{23}=2*0,6-1,636+1,212=0,77616$
$y_{3+1/2}=1,636+1,212*0,1=1,7567672$	$z_{3+1/2}=1,212+0,776*0,1=1,289368$
$\alpha_3=z_{3+1/2}=1,289368$	$\beta_3=2*0,7-1,7568+1,289=0,9326008$
$y_4=1,6+1,289*0,2=\underline{1,8934656}$	$z_4=1,212+0,93*0,2=\underline{1,39827216}$
5). $x_5=1$; $y_{4+1/2}=0,9$	
$f_{14}=z_4=1,39827216$	$f_{24}=2*0,8-1,893+1,398=1,10480656$
$y_{4+1/2}=1,893+1,398*0,1=2,0332928$	$z_{4+1/2}=1,398+1,105*0,1=1,508752816$
$\alpha_4=z_{4+1/2}=1,508752816$	$\beta_4=2*0,9-2,03+1,5=1,27546$
$y_5=1,893+1,5*0,2=\underline{2,195216163}$	$z_5=1,398+1,275*0,2=\underline{1,65336416}$

В этой статье приведены применения метода Эйлера к обыкновенным дифференциальным уравнениям. При решении задач дифференциального уравнения методом Эйлера получается как можно более точное значение в вычислениях уравнений. Полученные результаты методом, совпадают с результатами аналитического решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Копченова Н.В., Морон И.Л., Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Наука 1972 г. – 368с.
2. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.:Наука 1965г. – 386с.