

УДК 539.30

**НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ПОЛУПЛОСКОСТИ ОТ ДЕЙСТВИЯ НАГРУЗКИ
С ВОЗРОСТАЮЩЕЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ ЭПЮРОЙ**

А.А.Аманалиев, Б.Жумабаев

Институт геомеханики и освоения недр НАН КР

Массивы горных пород обладающие изотропным [1]или анизотропным [2] упругими свойствами представлены как полуплоскость и определена напряженное и деформированное состояние, которые возникают от действия нагрузки с возрастающей треугольной эпюрой. Все задачи такого рода представляют интерес для расчета напряженного состояния земной коры и для оснований сооружений [3].

Связь между компонентами напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} и деформаций ε_x , ε_y , γ_{xy} подчиняется закону Гука [1-2]. На контуре изотропных и анизотропных полуплоскостей действует нагрузка с возрастающей треугольной эпюрой, которая показана и описана на рис. 1.

$$N_1(\xi) = \begin{cases} n = 0, & \text{если } \xi < L_1 \text{ и } \xi > L_2 \\ n = \frac{L_1 - \xi}{L_1 - L_2}, & \text{если } L_1 < \xi \leq L_2 \end{cases} \quad (1)$$

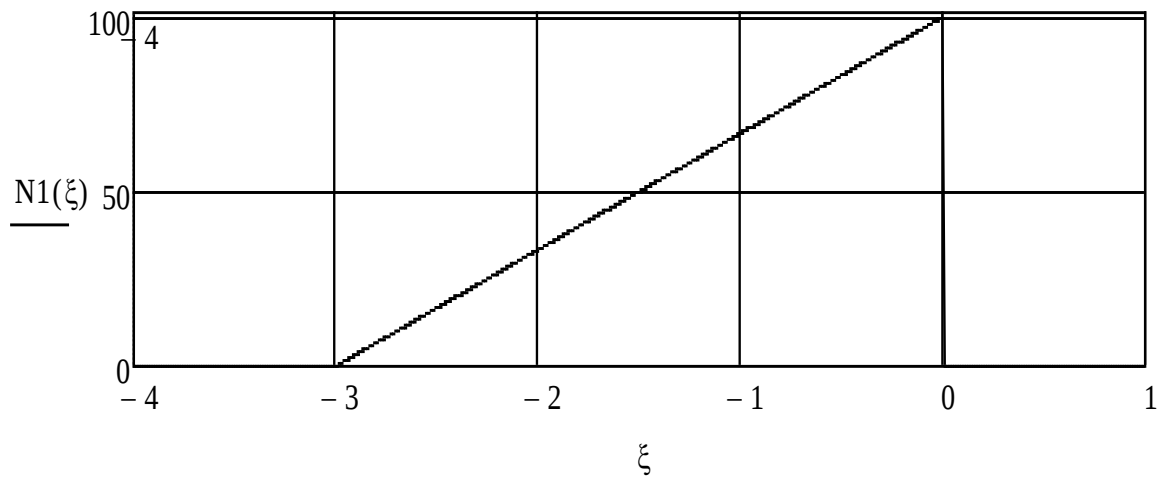


Рис. 1. Треугольная возрастающая эпюра

Для определенности обозначены: левая L_1 и правая L_2 границы загруженного участка контура полуплоскости $y=0$; P_0 – максимальное значение нормально действующей нагрузки N . Касательная составляющая внешних сил отсутствует, т.е. $T=0$.

Общее решение первой основной задачи для изотропных и анизотропных полуплоскостей, когда на их границе заданы внешние силы N и T , в работах [1-2] даны через соотношения для двух комплексных потенциалов. Они имеют аргументы $z=x+i*y$ в случае изотропного упругого тела [1], а для анизотропного тела комплексные аргументы разные [2]:

$$z_1(x, y) = x + \mu_1 y, \quad z_2(x, y) = x + \mu_2 y \quad (2)$$

Соотношения для комплексных потенциалов, которые определены из граничного условия (1) в случае изотропной полуплоскости, имеют вид:

$$\Phi(x, y) = \frac{-p_0}{2\pi i(L_1 - L_2)} \left[(L_1 - z(x, y)) \cdot \ln \left(\frac{L_2 - z(x, y)}{L_1 - z(x, y)} \right) + (L_1 - L_2) \right]$$

$$\Phi_p(x, y) = \frac{-p_0}{2\pi i L_1} \left[-\ln \left(\frac{L_2 - z(x, y)}{L_1 - z(x, y)} \right) + (L_1 - z(x, y)) \cdot \left(\frac{1}{L_1 - z(x, y)} - \frac{1}{L_2 - z(x, y)} \right) \right]$$

$$\Psi(x, y) = -z(x, y) \cdot \Phi_p(x, y)$$

Здесь принято обозначения:

$$p_0 = -100, i = \sqrt{-1}, z(x, y) = x + iy, \bar{z}(x, y) = x - iy, L_1 = -3, L_2 = 0.$$

Компоненты напряжений вычисляются известными в [1] соотношениями:

$$S_1(x, y) = 4\operatorname{Re}(\Phi(x, y)), \quad S_2(x, y) = 2(\overline{z(x, y)}\Phi(x, y) + \Psi(x, y)),$$

$$S_3(x, y) = \operatorname{Re}(S_2(x, y)),$$

$$\sigma_x = \frac{S_1(x, y) - S_3(x, y)}{2}, \quad \sigma_y = \frac{S_1(x, y) + S_3(x, y)}{2}, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(S_2(x, y)).$$

Компоненты относительных деформаций определяются законом Гука [1]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2,2 \cdot 10^4}(\sigma_x(x, y) - \nu\sigma_y(x, y)), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2,2 \cdot 10^4}(\sigma_y(x, y) - \nu\sigma_x(x, y)),$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{2,2 \cdot 10^4}\tau_{xy}.$$

Расчеты выполнены для одного типа трансверсально-изотропных горных пород со следующими упругими характеристиками (серый песчанистый сланец):

$$E = 2,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \nu_1 = 0,4; E_2 = 0,52 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \nu_2 = 0,2, G_2 = 0,12 \cdot 10^4 \text{ МПа};$$

Корни характеристического уравнения для этой породы равны: $\mu_1 = 1,662 \cdot i$; $\mu_2 = 0,937 \cdot i$; Для изотропного тела приняты характеристики этой породы, которые приведены без индекса снизу.

Из эпюр распределения напряжений (рис.2.) видно, что вертикальная компонента по глубине убывает быстрее, чем другие компоненты; вертикальная компонента на контуре полуплоскости почти точно повторяет закону распределения внешней силы; Касательная и горизонтальная нормальная компоненты по глубине убывают почти одинаково.

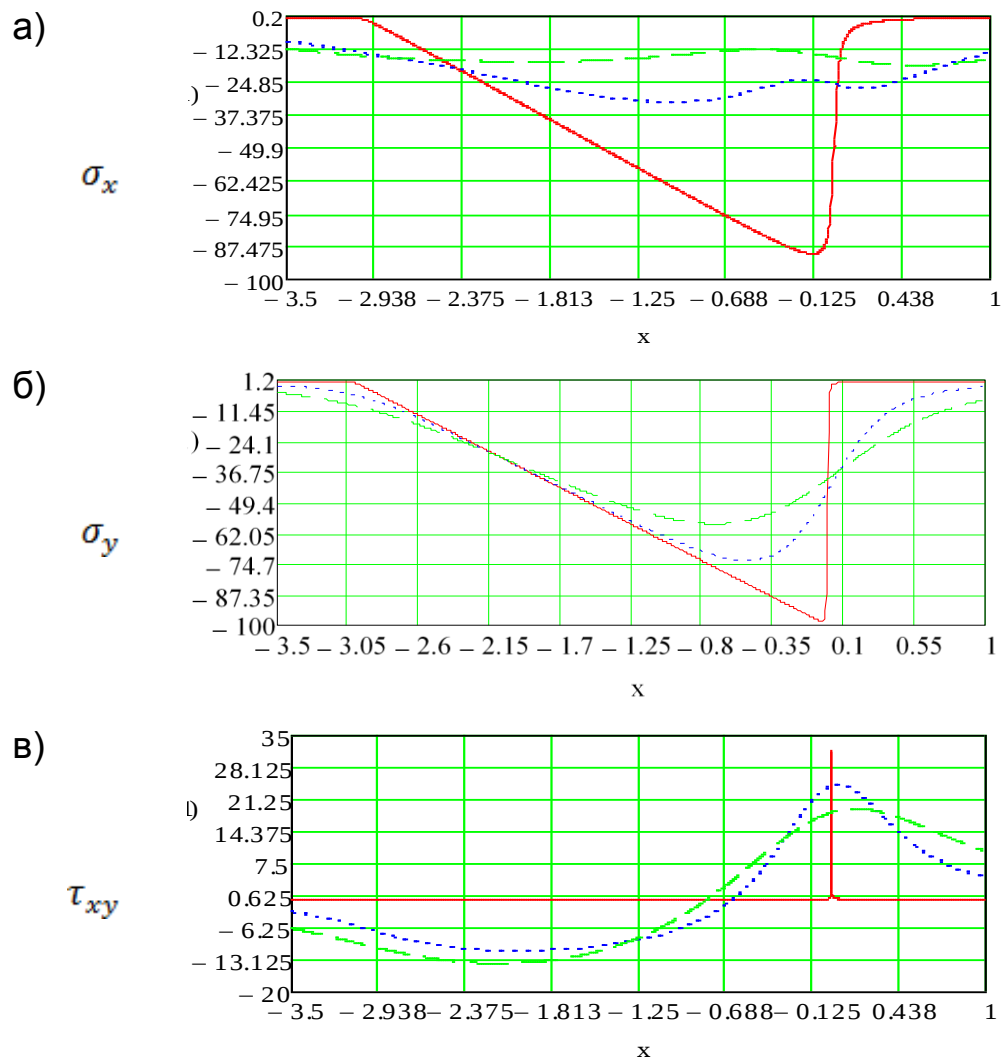


Рис.2. Эпюры распределения напряжений в горизонтальных сечениях.

- $x = -0,01$;
- $x = -0,5$;
- - - $x = -1$.

Компоненты напряжений для анизотропного тела выражаются двумя комплексными потнциалами, которые удовлетворяют граничные условия (1) и имеют вид:

$$\Phi_1(x, y) = \frac{p_0 \mu_2}{L_1} \left[(L_1 - z_1(x, y)) \cdot \ln \left(\frac{L_2 - z_1(x, y)}{L_1 - z_1(x, y)} \right) + (L_1 - L_2) \right] \cdot \Delta_0$$

$$\Phi_2(x, y) = -\frac{p_0 \mu_1}{L_1} \left[(L_1 - z_2(x, y)) \cdot \ln \left(\frac{L_2 - z_2(x, y)}{L_1 - z_2(x, y)} \right) + (L_1 - L_2) \right] \cdot \Delta_0$$

Здесь принято

$$\mu_1 = 1,662i, \quad \mu_2 = 0,937i, \quad z_1(x, y) = x + \mu_1 y, \quad z_2(x, y) = x + \mu_2 y,$$

a)



в)

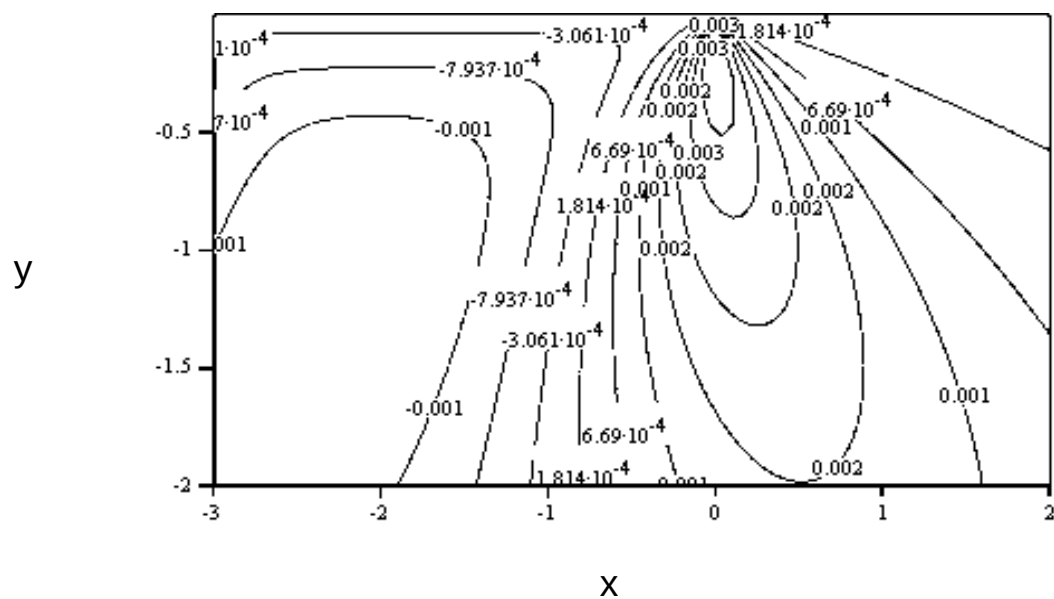


Рис.3. Изолинии компонентов относительных деформаций.

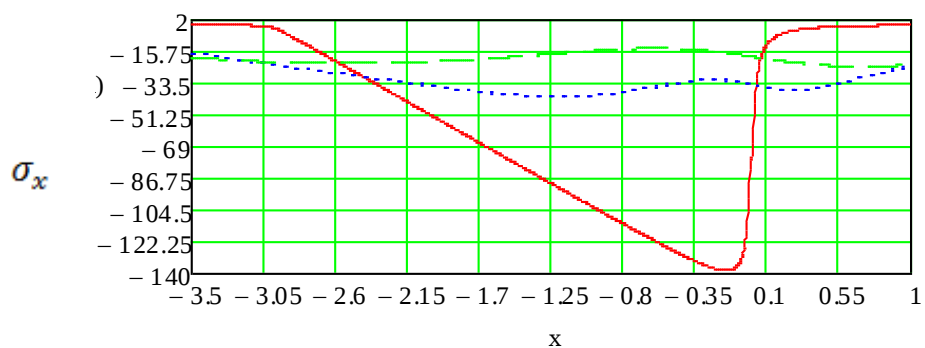
- а) горизонтальная относительная деформация;
- б) вертикальная относительная деформация;
- в) угловая деформация.

Компоненты напряжений и комплексные потенциалы связаны соотношениями

$$\sigma_x = 2\operatorname{Re}(\mu_1^2 \Phi_1(x, y) + \mu_2^2 \Phi_2(x, y)), \quad \sigma_y = 2\operatorname{Re}(\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y)),$$

$$\tau_{xy} = -2\operatorname{Re}(\mu_1 \Phi_1(x, y) + \mu_2 \Phi_2(x, y)).$$

а)



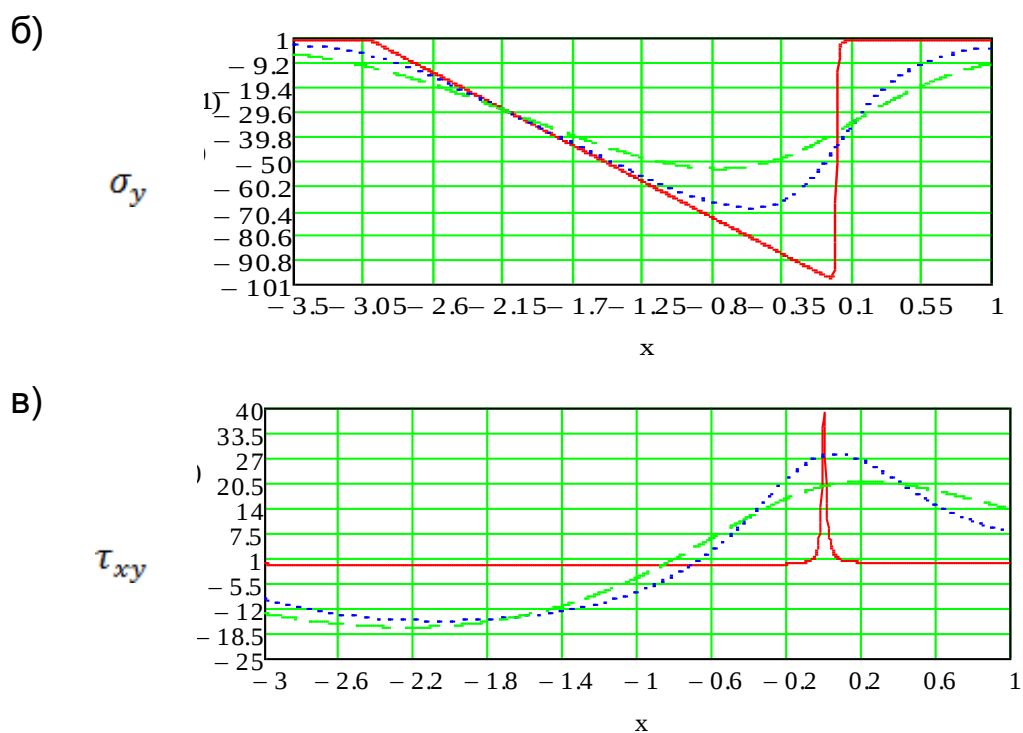
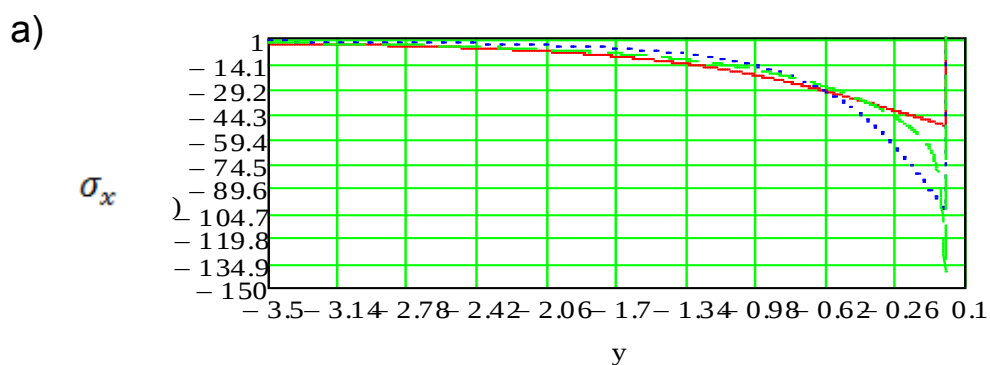


Рис. 4. Эпюры распределения напряжений в горизонтальных сечениях

- $x = -0,01$;
- ... $x = -0,5$;
- - - $x = -1$.

Следует отметить, что для записи всех формул расчета напряжений, деформаций и графических изображений этих перечисленных величин использована нотация Mathcad [4], что является новацией в технологии проведения исследований.



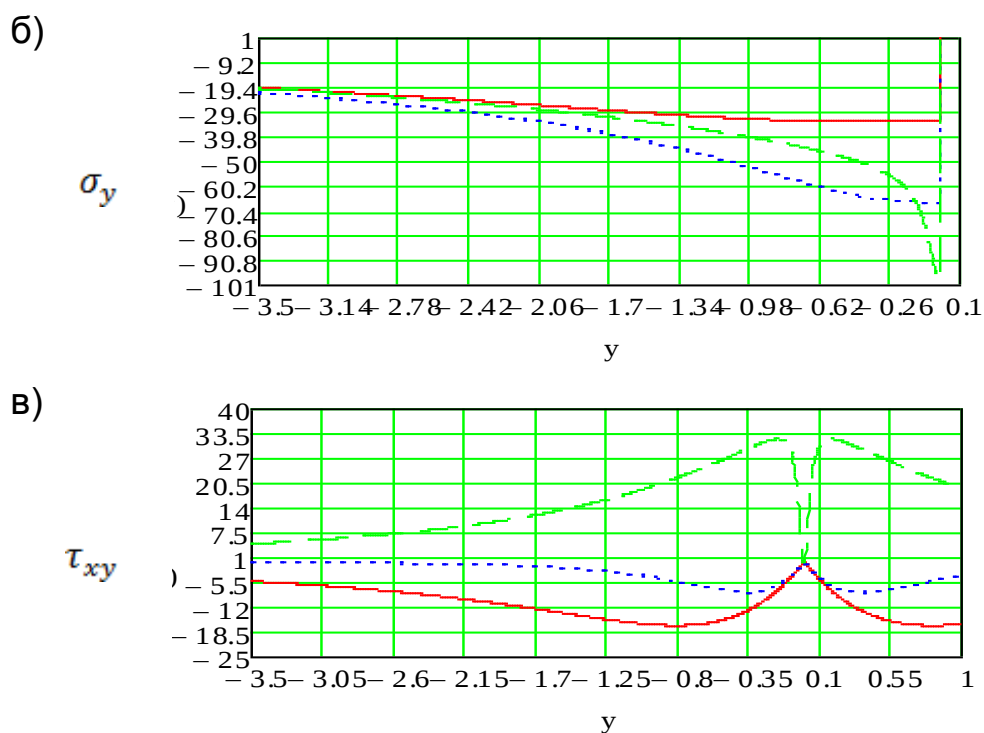


Рис. 5. Эпюры распределения напряжений в вертикальных сечениях.

- $x = -0,01;$
- $x = -0,5;$
- - - $x = -1.$

1. Дана постановка и аналитическое решение граничных задач для изотропной и анизотропной полуплоскости, когда на ее контуре действует нагрузка, эпюра которого возрастающая треугольная.

2. Построены эпюры распределения напряжений для различных глубин в горизонтальных сечениях и различных вертикальных сечениях полуплоскостей, а также закономерности распределения компонентов напряжений и относительных деформаций

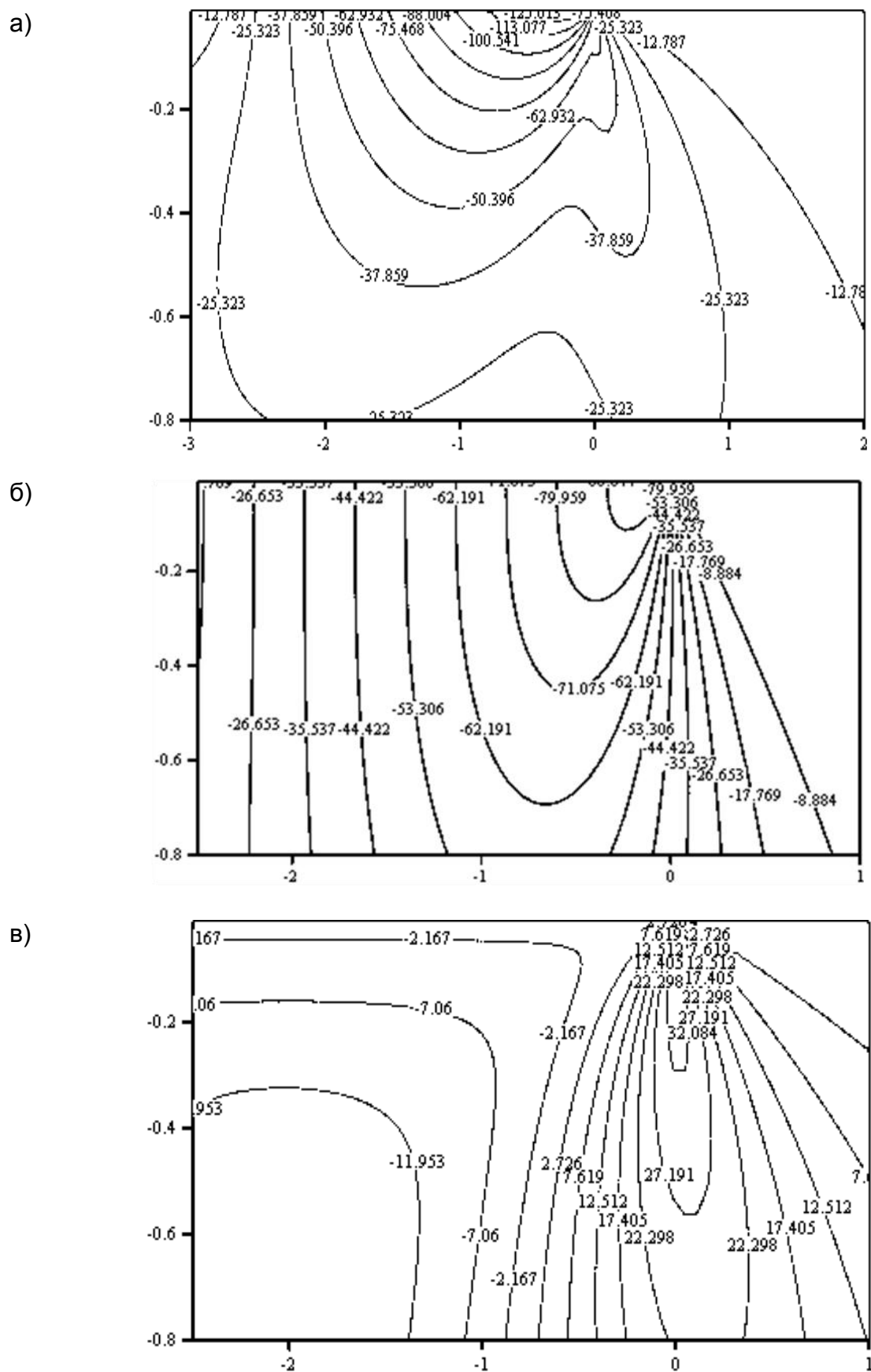


Рис.6. Изолинии компонентов напряжений в анизотропной полуплоскости: а) горизонтальная компонента; б) вертикальная компонента; в) касательной компонента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела.:Наука, М.,1977, 416с.
3. Жумабаев Б.Ж. Распределение напряжений в массивах пород с гористым рельефом. – Издательство “Илим” Фрунзе, 1988. – 190 с.
4. Кирьянов Д. В. MathCAD 14. – СПб.: БХВ-Петербург. – 704 с.