

УДК 622.775

РАСЧЕТНАЯ МОДЕЛЬ ДИФФУЗИИ МЕТАЛЛОВ ПРИ ПСВ УРАНА

Л.Б. Сабирова

Казахский Национальный технический университет
имени К.И.Сатпаева

Прежде чем переходить к обсуждению и моделированию фильтрации растворов в пористой среде продуктивного пласта и вмещающих пород кратко остановимся на модели физического процесса диффузионного растворения металла. Основная расчетная модель этого процесса, полученная нами ранее, сведена к уравнению:

$$t_{\delta} = \frac{d^2 \ln \frac{11,2}{\varepsilon_n \cdot \pi^2}}{\pi^2 \cdot D_n}, \text{ сут}, \quad (1)$$

где t_{δ} – время диффузионного растворения куска руды диаметром d , см; ε_n – проектное значение коэффициента извлечения металла, доли ед.; D_n – коэффициент эффективной диффузии, см²/сут.

Из формулы (1) следует, что время растворения металла зависит прежде всего от размеров d и от D_n .

Понятно, что первая величина d относится к разряду неуправляемых параметров при подземном скважинном выщелачивании металлов.

Вторая величина D_n в принципе также относится к неуправляемому параметру.

Физические модели диффузионного растворения и фильтрационного переноса металлов рассматривались нами ранее для совершенных скважин. Для сложных условий, оцениваемых критериями такие модели отсутствуют, и их следует скорректировать.

Рассмотрим диффузионное растворение металла в реагенте.

В соответствии с законом диффузии Фика запишем модель в виде дифференциального уравнения [1]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_x \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right),$$

где $C(x, y, z, t)$ – искомая функция распределения металла в пространстве по времени t ; D_x, D_y, D_z - коэффициенты диффузии по координатам x, y, z .

Для наших исследований интерес представляет одномерный (линейный) закон диффузии, который описывается уравнением:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Следует искать решение (2) в виде функции $C(x, t)$ при следующих граничных условиях:

$$C(x, t) = C_0 \text{ при } 0 < x < 1 \text{ и } t = 0;$$

$$C(x, t) = 0 \text{ при } x = \ell, x = 0, t > 0,$$

где C_0 – исходная концентрация металла, т/см³;

$C(x, t)$ – текущая концентрация металла по оси x за время t ;

ℓ - размер куска руды, см;

t – время диффузии, сут.

Имеется решение такого уравнения [1] в виде бесконечного

ряда:
$$C(x, t) = \frac{4C_0}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \operatorname{Csch} \left(\frac{2j+1}{x} \right) \times \exp \left\{ - \left[(2j+1) \frac{\pi}{x} \right]^2 D_{\pi} \cdot t \right\}. \quad (3)$$

Если положить, что в относительных единицах $C_0 = 1$, а $C_{\text{пр}} = 0,75$, т.е. конечное значение диффундирующего металла

(растворения) до 75 %, то можно получить простейшее решение, ограничившись первым членом быстро убывающего ряда (3):

$$\frac{C_{\text{пр}}}{C_o} = \frac{8}{\pi^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 D_{\text{н}} \cdot t}{\ell^2}\right). \quad (4)$$

При заданном $D_{\text{н}} \cong 0,864 \cdot 10^{-3}$ см²/сут. из (4) находим время диффузионного выщелачивания металла:

$$t_{\partial} = \frac{\ell^2 \cdot \ln \frac{8C_o}{C_{\text{пр}} \cdot \pi^2}}{\pi^2 \cdot D_{\text{н}}}, \text{ сут}, \quad (5)$$

где ℓ - средний диаметр куса руды, см;

$C_o = 1$ и $C_{\text{пр}} \cong 0,7 \div 0,75$ – относительные единицы содержания металла в руде и извлечения его из руды;

$D_{\text{н}}$ – эффективный коэффициент диффузии, м²/сут, для металлов [1]

$$D_{\text{н}} \cong 0,864 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{сут}.$$

Анализ формулы (2.5) показывает, что она обладает некоторыми недостатками. Первое - $C_{\text{пр}} \cong 0,7 \div 0,75$, т.е. весьма узкий, хотя и практически правильный диапазон изменения коэффициента извлечения металла. Второе – при увеличении $C_{\text{пр}}$ от 0,7 до 0,75 время t_{∂} будет уменьшаться, что является противоречием.

Исходя из этих замечаний, запишем формулу (5) в виде:

$$t_{\partial} = \frac{\ell^2 \cdot \ln \alpha \frac{8C_o}{C_{\text{пр}} \cdot \pi^2}}{\pi^2 \cdot D_{\text{н}}}, \text{ сут}, \quad (6)$$

где α - некоторый параметр, $\ell > 0$, который определяется статистическим путем или экспериментально по схеме.

Для определения α принимаем $C_{\text{пр}} = 0,7$, тогда формулу (6) запишем:

$$t_{\partial} = \frac{\ell^2 \cdot \ln \alpha \cdot 1,159}{\pi^2 \cdot D_{\pi}}. \quad (7)$$

$$\text{Из уравнения (7) имеем: } \ln 1,159 \cdot \alpha = \frac{t_{\partial} \cdot \pi^2 \cdot D_{\pi}}{\ell^2}. \quad (8)$$

Из уравнения (8) легко определить искомый параметр α из уравнения:

$$\alpha = \frac{1}{1,159} e^{\frac{t_{\partial} \cdot \pi^2 \cdot D_{\pi}}{\ell^2}}. \quad (9)$$

Следовательно, если известно время диффузионного выщелачивания - t_{∂} и размер куска ℓ , то по формуле (9) легко подсчитать параметр α .

Например, для руды месторождения Тохтазан имеем: $\ell = 2$ см, $D_{\pi} = 0,864 \cdot 10^{-3}$ см²/сут, $t_{\partial} = 36$ сут.

$$\alpha = \frac{1}{1,159} \exp\left(\frac{36 \cdot \pi^2 \cdot 0,864}{4 \cdot 10^3}\right) = \frac{1,079}{1,159} = 0,93.$$

Следовательно, для условий руды месторождения Тохтазан имеем уравнение:

$$t_{\partial} = \frac{\ell^2 \cdot \ln 0,93 \cdot \frac{8 \cdot C_o}{C_{\pi} \cdot \pi^2}}{\pi^2 \cdot D_{\pi}}, \text{ сут.} \quad (10)$$

Кроме того, величину α можно рассчитать, если известна функция извлечения металла $\varepsilon(t)$ в виде:

$$\varepsilon(t) = 1 - \frac{1}{e^{C_1 t_{\partial}}}, \quad (11)$$

где C_1 – параметр, определяемый статистически.

Пусть имеем для условий месторождения Тохтазан $\varepsilon(t) = 0,65$; $t_{\partial} = 40$ сут.

Из уравнения (11) имеем:

$$0,65 = 1 - \frac{1}{e^{C_1 t_\partial}}, \quad (12)$$

откуда, решая (12) относительно C_1 , получим:

$$e^{C_1 t_\partial} = \frac{1}{1 - 0,65} \quad \text{или} \quad C_1 = \frac{1}{t_\partial} \ln 2,87, \quad C_1 = \frac{1,049}{40} = 0,0262.$$

При этом, уравнение (11) запишется в виде:

$$\varepsilon(t) = 1 - \exp(-0,0262t). \quad (13)$$

Пусть задано $t = 20$ сут, тогда: $\varepsilon(t) = 0,48$, т.е. $\approx 50\%$ за 20 суток.

Рассмотрим более сложную руду месторождения Пустынное, для нее $t_\partial = 340$ сут; $\varepsilon(t) = 0,3$ или 30 %, тогда имеем:

$$C_1 = \frac{1}{340} \ln \frac{1}{1 - 0,3} = 0,00104.$$

Для извлечения металла до $\varepsilon = 0,5$ получим формулу:

$$t_\partial = \frac{\ln \frac{1}{1 - 0,5}}{0,00104} = 666 \text{ суток},$$

т.е. в принципе и сульфидные руды можно выщелачивать, только срок существенно растягивается.

Определим параметр α для руд месторождения Пустынное по формуле (9):

$$\alpha = \frac{1}{1,159} e^{\frac{340 \cdot \pi^2 \cdot 0,864}{6,25 \cdot 10^3}} = 1,37.$$

Тогда формула (6) для определения t_∂ для руд Пустынного будет:

$$t_\partial = \frac{\ell^2 \cdot \ln \frac{11 \cdot C_o}{C_{np} \cdot \pi^2}}{\pi^2 \cdot D_n}, \quad \text{сут.} \quad (14)$$

Если теперь отделить фракцию 0,5 см и ниже, то время сократится:

$$t_{\partial} = \frac{0,25 \cdot 2223}{0,864 \cdot \pi^2} = 65 \text{ суток},$$

а при крупности $\ell = 0,6$:

$$t_{\partial} = \frac{0,36 \cdot 2223}{0,864 \cdot \pi^2} = 94 \text{ суток}.$$

Из полученных формул следует сделать выводы.

1. Выведены новые формулы (5), (6) для вычисления времени диффузионного растворения металлов от влияющих факторов: среднего размера куска руды - ℓ , коэффициента диффузии - $D_{\text{п}}$, коэффициента извлечения металла – $C_{\text{пр}}$ при его выщелачивании.

2. Наиболее сильно на время диффузионного выщелачивания - t_{∂} металла влияет размер куска руды, которое пропорционально квадрату линейного размера куска.

Для проектирования технологических систем выщелачивания металлов одним из главных параметров является время диффузионного растворения и извлечения конкретного металла до проектного значения коэффициента извлечения. Диффузионное растворение металлов достаточно теоретически освещено в известной монографии П. Шьюмана [1] и других работах [2, 3]. Однако до сих пор нет достаточно надежных аналитических методов, позволяющих определить время растворения металлов в функции от основных влияющих факторов.

Будем следовать П. Шьюмону [1] и искать расчетные модели для определения времени диффузионного растворения металла для идеальных форм рудного или иного сырья.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (2) второго закона Фика при одномерной диффузии в пластине:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (15)$$

где $C(x, t)$ – концентрация вещества C как функция одной координаты – x и времени t ;

D_n – эффективный коэффициент диффузии.

Если принять, что D_n не зависит от времени и от координаты x , то известно решение (15) в виде бесконечного сходящегося ряда:

$$C(x, t) = \frac{4C_0}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \operatorname{Csch}\left(\frac{2j+1}{h}\right) \times \exp\left\{-\left[(2j+1)\frac{\pi}{h}\right]^2 D_n \cdot t\right\}, \quad (16)$$

где $\operatorname{Csch}x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$;

C_0 – начальная концентрация металла в пластине – h ;

x – глубина диффузии.

При выщелачивании практически невозможно определить концентрацию полезного компонента – металла на различной глубине куска. Для получения общего количества выщелоченного металла необходимо знать среднюю концентрацию металла $\bar{C}$ в идеальной пластине, толщиной – h . Для этого необходимо взять интеграл от функции (16) по h в виде:

$$\bar{C}(t) = \frac{1}{h} \int_0^h C(x, t) \cdot dx. \quad (17)$$

Подставляя в (17) значение $C(x, t)$ (16) после интегрирования и необходимых преобразований получим новый ряд:

$$\bar{C}(t) = \frac{8C_0}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} \exp\left\{-\left[\frac{(2j+1)\pi}{h}\right]^2 D_n \cdot t\right\}. \quad (18)$$

Рассмотрим функцию ряда - $\bar{C}(t)$ до 3-го члена включительно, тогда получим:

$$\begin{aligned}\bar{C}(t) = & \frac{8C_o}{\pi^2} \exp\left(-\frac{\pi^2}{h^2}\right) D_n \cdot t + \\ & + \frac{1}{9} \exp\left(-\frac{9\pi^2}{h^2}\right) D_n \cdot t + \\ & + \frac{1}{25} \exp\left(-\frac{25\pi^2}{h^2}\right) D_n \cdot t + \\ & + \frac{1}{49} \exp\left(-\frac{49\pi^2}{h^2}\right) D_n \cdot t + \dots\end{aligned}\quad (19)$$

С погрешностью не более 3% можно из (19) записать уравнение:

$$\bar{C}_{\text{пр}}(t) = \frac{11,2C_o}{\pi^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 D_n \cdot t}{h^2}\right). \quad (20)$$

Решая уравнение (20) относительно времени $t_{\text{выщелачивания}}$ до $\bar{C}_{\text{пр}}$, получим:

$$t_{\partial} = \frac{h^2 \cdot \ln \frac{11,2C_o}{\bar{C}_{\text{пр}} \cdot \pi^2}}{\pi^2 \cdot D_n}, \text{ сут}, \quad (21)$$

где h измеряется в сантиметрах;

D_n измеряется в $\text{см}^2/\text{сут}$;

C_o и $\bar{C}_{\text{пр}}$ - измеряются в относительных единицах, поэтому $C_o = 1$, а $\bar{C}_{\text{пр}}$ равно проектному коэффициенту извлечения металла из руды, т.е. $\bar{C}_{\text{пр}} = \varepsilon_n$.

Формула (21) является основополагающей для определения времени диффузионного растворения металла при выщелачивании из пластин.

Рассмотрим численный пример.

Пусть дано: $h = 2$ см, $C_{\text{пр}} = 0,7$, $D_n = 0,864 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{сут}$. [1], тогда:

$$t_{\partial} = \frac{4 \cdot \ln \frac{11,2 \cdot 1}{0,7 \cdot \pi^2}}{\pi^2 \cdot 0,864 \cdot 10^{-3}} = 227 \text{ суток}.$$

Если, например, крупность кусков породы уменьшить вдвое, т.е. $h = 1$ см, то время сократится в четыре раза и составит $t_{\partial} = 57$ суток, а при $h = 0,5$ см всего 14 суток. Из этого простого примера следует, что

размер куска рудного сырья является главным показателем при диффузионном растворении.

Рассмотрим также решение задачи определения времени диффузионного растворения для шара с радиусом – r , см. В сферической системе координат второй закон Фика имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial C}{\partial r} = 0. \quad (22)$$

Известно решение этого уравнения для малых времен в виде для среднего значения $\bar{C}(r)$:

$$\bar{C} = \frac{1}{r} \int_0^r F(r) \cdot dr = C_o \exp \left[- \left(\frac{t}{r} \right)^{\frac{3}{2}} \right], \quad (23)$$

где
$$r \approx \frac{r_e^2}{2D_{\Pi}} \left(\frac{C_{\Pi\Pi}}{C_o} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в уравнение (23) и решая его относительно времени t_{∂} , получим для шара:

$$t_{\partial} = \frac{r_e^2}{2D_{\Pi}} \sqrt[3]{\frac{C_{\Pi\Pi}}{C_o}} \cdot \sqrt[3]{\left(\ln \frac{C_o}{C_{\Pi\Pi}} \right)^2}, \text{ сут.}$$

или иначе

$$t_{\partial} = \frac{r_e^2}{2D_{\Pi}} \left(\frac{C_{\Pi\Pi}}{C_o} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\ln \frac{C_o}{C_{\Pi\Pi}} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (25)$$

Сопоставим теперь численные значения для пластины (21) и шара для только что рассмотренного примера.

По формуле имеем при $\ell = 2$ см, тогда $r = 1$ см:

$$t_{\partial} = \frac{1}{2 \cdot 0,864 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{0,7}{1} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \ln \left(\frac{1}{0,7} \right)^{\frac{2}{3}} = 256 \text{ суток.}$$

При $r = 0,5$ см, $t_{\partial} = 64$ сут; и при $r = 0,2$ см, $t_{\partial} = 16$ суток.

Из приведенных данных следует, что формулы (21) и (24) дают практически одинаковый результат.

Полученные путем теоретического анализа фундаментальные формулы для вычисления времени диффузионного растворения или выщелачивания металлов рекомендуются для практических расчетов при проектировании и управлении технологических систем подземного скважинного выщелачивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шьюман П. Диффузия в твердых телах, М., Наука, 1968, 320с.
2. Рогов Е.И., Язиков В.Г., Рогов А.Е. Математическое моделирование в горном деле. Алматы, Lem., 2002, 204с.
3. Рогов А.Е., Рыспанов Н.Б. Математические основы геотехнологии. Алматы., FORTRESS, 2007, 367с.