

УДК-519.622(575.2)(04)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

А.М.Осмонканов, Э.Т.Тургуналиев, К.Т.Карыбалиева

КГУСТА им. Н. Исанова

Как известно, решение нелинейных (алгебраических, дифференциальных, интегральных и т.п.) уравнений является сложной задачей и метод Ньютона является в настоящее время одним из наиболее употребительных методов для решения нелинейных уравнений. Главным его достоинством является очень быстрая сходимость последовательных приближений к точному решению и эффективен только при достаточной близости начального приближения к решению системы.

Ньютоном был предложен эффективный метод нахождения корня алгебраического уравнения

$$f(x) = 0$$

Пусть начальное приближение x_0 известно. Заменим $f(x)$ отрезком ряда Тейлора $f(x) \simeq T_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x)$

и за следующее приближение x_1 возьмем корень уравнения $T_1(x) = 0$, т.е.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

вообще, если итерация x_k известна, то следующее приближение x_{k+1} в методе Ньютона определяется по правилу

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,\dots$$

В последствии метод Ньютона был перенесен на систему алгебраических уравнений, а затем обобщен Л.В. Канторовичем на функциональные уравнения в банаховых пространствах.

Пусть имеется оператор $P: X \rightarrow Y$, где X, Y - банаховы пространства. Предположим, что $\Omega \subset X$ открытое множество и в нем имеется нуль оператора P , т.е. такой элемент x^* , что

$$P(x^*) = 0$$

Возьмем произвольный элемент $x_0 \in \Omega$. Предполагая, что оператор P имеет в Ω непрерывную производную (производную Фреше), можно заменить элемент $P(x_0) = P(x_0) - P(x^*)$ близким ему выражением

$$P(x_0) - P(x^*) \simeq P'(x_0)(x - x_0)$$

Написанное уравнение –линейное, и его решением будет

$$x_1 = x_0 - [P'(x_0)]^{-1}P(x_0)$$

Продолжая этот процесс, мы получим, находя из x_0 – начального приближения, - последовательность $\{x_n\}$

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1}P(x_n) \quad (n=0,1,2,..) \quad (1)$$

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню x^* и x_0 выбрано достаточно близко к x^* , то по непрерывности оператора P' операторы $P'(x_n)$ и $P'(x_0)$ будут мало отличаться. Это дает основание ввести в место формул (1) упрощенные

$$x_{n+1} = x_n - (P'(x_0))^{-1}P(x_n) \quad (n=0,1,2,..) \quad (2)$$

Способ образования последовательности $\{x_n\}$ по формулам (2) называется модифицированным методом Ньютона-Канторовича. Формулы (2) хотя дают, вообще говоря, худшие приближения, но значительно проще формул (1).

Рассмотрим вопрос о применении метода Ньютона к дифференциальным уравнениям. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y'(x) = f(x, y, (x))$$

$$y(0) = 0$$

Предположим что функция $f(x, y)$ непрерывно и имеет непрерывную производную по y .

Рассмотрим оператор

$$u = P(y), u(x) = y' - f(x, y(x))$$

Тогда

$$P'(z)(y)(x) = y'(x) - f'_y(x, z(x))y(x) \quad (3)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} P'(z)(y)(x) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{P(z(x) + \tau y(x)) - P(z(x))}{\tau} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{[z(x) + \tau y(x)]' - (z(x))'}{\tau} - \\ &\quad - \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(x, z(x) + \tau y(x)) - f(x, z(x))}{\tau} = y'(x) - f'_y(x, z(x))y(x). \end{aligned}$$

Найдем $\Gamma = (P'(y_0))^{-1}$. Вследствие (3) элемент $y = \Gamma(u)$ есть решение дифференциального уравнения

$$y'(x) = f'_y(x, y_0(x))y(x) + u(x) \quad (4)$$

а уравнение (4)- линейное неоднородное дифференциальное уравнение и решение его легко находится.

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$y' = x^2 + y^2$$

$$y(0) = 0$$

В данном случае оператору $u = P(y)$ определяется формулой

$$u(x) = y'(x) - x^2 - y^2$$

$$P'(y_0)\varepsilon(x) \equiv \varepsilon' - 2\varepsilon(x)$$

Выражение $P'(y_0)(y)(x)$ нужно понимать как производная оператора P в точке $y_0(x)$ по “направлению” $y(x)$.

Уравнение (4) имеет вид

$$\varepsilon'(x) = 2y_0(x)\varepsilon(x) + u(x).$$

Для последовательных приближений получим уравнение

$$y_{n+1} = y_n - (P'(y_0))^{-1}P(y_n) \quad \text{обозначив } \varepsilon_n = (P'(y_0))^{-1}P(y_n)$$

получим

$$P'(y_0)\varepsilon_n = -P(y_n) \text{ т.е.}$$

$$\varepsilon'_n - 2y_0\varepsilon_n = -y'_n + x^2 + y_n^2(5)$$

Исходя из условия задачи, в качестве нулевого приближения $y_0(x)$ возьмем $y_0(x) = 0$. Тогда

$$\varepsilon'_0(x) = x^2 \text{ и } \varepsilon_0(x) = \frac{x^3}{3}$$

отсюда

$$y_1(x) = y_0(x) + \varepsilon_0(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$\varepsilon'_1(x) = -\left(\frac{x^3}{3}\right)' + x^2 + y_1^2 = \left(\frac{x^3}{3}\right)^2 = \frac{x^6}{3^2}$$

$$\varepsilon_1(x) = \frac{x^7}{7 * 9}$$

$$y_2(x) = y_1(x) + \varepsilon_1(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 * 9}$$

$$\varepsilon'_2(x) = -\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 * 9}\right)' + x^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 * 9}\right)^2 = 2 * \frac{x^{10}}{3^3 * 7} + \frac{x^{14}}{7^2 * 3^4}$$

Откуда
$$\varepsilon_2(x) = \frac{2 * x^{11}}{3^3 * 7 * 11} + \frac{x^{15}}{5 * 7^2 * 3^5}$$

$$y_3(x) = y_2(x) + \varepsilon_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 * 9} + \frac{2 * x^{11}}{3^3 * 7 * 11} + \frac{x^{15}}{5 * 7^2 * 3^5}$$

$$\varepsilon'_3(x) = -\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 * 9} + \frac{2 * x^{11}}{3^3 * 7 * 11} + \frac{x^{15}}{5 * 7^2 * 3^5}\right)' +$$

$$\begin{aligned}
& +x^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 * 9} + \frac{2 * x^{11}}{3^3 * 7 * 11} + \frac{x^{15}}{5 * 7^2 * 3^5} \right)^2 = \\
& = -x^2 - \frac{x^6}{9} - \frac{2 * x^{10}}{3^3 * 7} - \frac{x^{14}}{7^2 * 3^4} + x^2 + \frac{x^6}{6} + \\
& + \frac{x^{14}}{7^2 * 3^4} + \frac{4 * x^{22}}{3^6 * 7^2 * 11^2} + \frac{x^{30}}{5^2 * 7^4 * 3^{10}} + \frac{2 * x^{10}}{7 * 3^3} + \\
& + \frac{4 * x^{14}}{3^4 * 7 * 11} + \frac{2x^{18}}{5 * 7^2 * 3^6} + \frac{4x^{18}}{3^6 * 7^2 * 11} + \frac{2 * x^{22}}{7^3 * 3^7 * 5} + \\
& + \frac{4x^{26}}{7^3 * 5 * 3^8 * 11} = \frac{4 * x^{14}}{3^4 * 7 * 11} + 2 \left(\frac{1}{5 * 7^2 * 3^6} + \frac{2}{3^5 * 7^2 * 11} \right) x^{18} + \\
& + 2 \left(\frac{1}{7^3 * 3^7 * 5} + \frac{2}{3^6 * 7^2 * 11^2} \right) x^{22} + \frac{4x^{26}}{7^3 * 5 * 3^8 * 11} + \frac{x^{30}}{5^2 * 7^4 * 3^{10}}
\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}
\varepsilon_3(x) &= \frac{4 * x^{15}}{3^4 * 7 * 11 * 15} + 2 \left(\frac{1}{5 * 7^2 * 3^6} + \frac{2}{3^5 * 7^2 * 11} \right) * \frac{x^{19}}{19} + \\
& + 2 \left(\frac{1}{7^3 * 3^7 * 5} + \frac{2}{3^6 * 7^2 * 11^2} \right) \frac{x^{23}}{23} + \frac{4x^{27}}{7^3 * 5 * 3^8 * 11 * 27} + \frac{x^{31}}{5^2 * 7^4 * 3^{10} * 31}
\end{aligned}$$

Отсюда видим, что уже третья итерация дает достаточно хорошее приближенное решение на конечном отрезке.

Интересно сравнить метод Ньютона методом последовательных приближений.

Метод последовательных приближений состоит в том, что решение $y(x)$ получают как предел последовательности функций $y_n(x)$, которые находятся по рекуррентной формуле.

$$y^n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx$$

Тогда для нашего уравнения находим

$$y_1(x) = \int_0^x (x^2 + y_0^2) dx = \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Аналогично получаем второе и третье приближения

$$y_2(x) = \int_0^x (x^2 + y_1^2) dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{3^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{3^2 * 7}$$

$$y_3(x) = \int_0^x (x^2 + y_2^2) dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{3^2} + \frac{2 * x^{10}}{3^3 * 7} + \frac{x^{14}}{3^4 * 7^2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 * 3^2} + \frac{2 * x^{11}}{3^3 * 7 * 11} + \frac{x^{15}}{3^4 * 7^2 * 15}$$

Мы видим, что в данном случае метод Ньютона и метод последовательных приближений дают одни и те же приближенные решения. Оценим теперь погрешность приближения. Известно, что если $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $G = \{(x, y): |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$,

Удовлетворяем условию Липшица по

$$y: |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|$$

то независимо от выбора начального приближения $y_0(x)$, последовательность функций $y_n(x)$, сходящаяся на некотором отрезке $[x_0, x_0 + h]$ к решению задачи и оценки погрешности приближенного решения дается неравенством

$$\varepsilon_n = |y(x) - y_n(x)| \leq M * N^n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\text{где: } M = \max_{(x, y) \in G} |f(x, y)|, h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

Для нашей задачи $f(x, y) = x^2 + y^2$ определена и непрерывна во всей плоскости, то в качестве a и b можно взять любые числа. Возьмем для определенности $a = 1, b = 1$. Тогда будем иметь

$$M = \max|f(x, y)| = \max(x^2 + y^2) = 2$$

$$N = \max|f'_y| = \max(2y) = 2$$

$$\text{Тогда } h = \min\left(2, \frac{1}{2}\right) = 0,5$$

Таким образом, на отрезке $[0, 0,5]$ получаем

$$|y(x) - y_3(x)| \leq 2 * 2^3 * \frac{(0,5)^4}{4!} = \frac{16}{96} * 0,0625 \approx 0,004025$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Наука, М., 1977; 744 с.
2. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. Наука, М., 1981, 384 с.