

УДК 550.834 (575.2) (04)

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ,
ПОСТРОЕННЫХ ПО СЕЙСМИЧЕСКИМ ДАННЫМ**

А.М. Осмонканов, Э.Тургуналиев, А.А.Уралиев,
М.К.Асанова, Т.Эркинбаев

КГУСТА им Н. Исанова

В данной работе на основе наблюдаемых значений магнитуды земного шара изучаются параметры модели АРПСС. Полученные данные рассматриваются как случайный процесс (временный ряд) и изучаются посредством аппарата теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов.

Прогнозирование поведения временного ряда на ближайшие 5-лет произведено посредством программы «STATISTIKA».

Важной задачей при анализе временных рядов является определение параметров модели АРПСС. В модели АРПСС имеются следующие типы параметров: p -порядок авторегрессии, d -порядок разности, q -порядок скользящего среднего.

Основной критерий идентификации параметров модели АРПСС-поведение автокорреляционный и частный автокорреляционный функции временного ряда. Но действительности они не известны, и мы имеем дело с их более или менее точными оценками, которые называются выборочными автокорреляционными и частными автокорреляционными функциями. Корреляционная функция

действительного случайного процесса $\{x_t\}_{t \in T}$ определяется равенством

$K(t,s)=E\{[X_t + EX_t][X_s - EX_s]\}$, где E - математическое ожидание, а частная автокорреляционная функция $Rorr(X_t, X_s)=\frac{K(t,s)}{DX_t DX_s}$, где D - дисперсия.

Выборочная автокорреляция по выборке $X_1, X_2, \dots, X_n$ определяется по формуле

$$C_k(n) = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - EX_t)(X_{t+k} - EX_{t+k}),$$

т-е. автокорреляционная функция случайного процесса. x_t —это корреляция значений x_t и X_{t+h} и следовательно автокорреляция завысит лишь от h (но не от t).

В исследовании временного ряда, сначала нужно оценить параметр d . Прежде всего, визуализируем ряд и определим, является ли ряд стационарным или нет. Как видно из рис №2 тренд не наблюдается, тогда рассмотрим выборочную автокорреляционную функцию $C_k(n)$. Рассмотрев график автокорреляционную функцию мы приходим к trendyо том, что ряд нестационарен, т.и. автокорреляционная функция не имеет тенденции к затуханию. Убывание автокорреляционной функции является необходимым условием для стационарного случайного процесса. И так, ряд не стационарен. В этом случае рассмотрим разность первого порядка

$$\{Y_t = \nabla X_t = X_t - X_{t-1}\}_{t=2}^n$$

Трижды применив к ряду $\{x_t\}_{t=1}^n$ разностный оператор ∇ , мы получили стационарный ряд. Таким образом, у нас порядок разности в модели АРПСС равен 3.

Для определения параметров p, q рассматривают выборочные автокорреляционные и частные автокорреляционные функции ряда $\{\nabla^3 x_t\}_{t=1}^n$.

Имеются следующие закономерности, связывающие параметры p , q и поведение автокорреляционный и частный автокорреляционный функции временного ряда.

Пусть наблюдается процесс авторегрессии порядка p . Тогда его частная автокорреляционная функция обрывается на лаге p .

Но у нас такое не наблюдается. И мы взяли $p=0$.

Пусть наблюдается процесс скользящего среднего порядка q , тогда его автокорреляционная функция обрывается на лаге q . (рис). В нашем случае $q=3$. Далее частная автокорреляционная функция плавно спадает.

Следует отметить, что эти критерии носят достаточно расплывчатый характер, возможно, с их помощью будет идентифицирована и не одна модель.

Теперь о прогнозировании.

Известно, что теоретически предиктор (прогноз) $X_t^*(k)$ для будущего значения процесса X_{t+k} , $k \geq 1$ предполагая, что известны все значения X до момента t включительно определяется по формуле

$$X_t^*(k) = E(X_{t+k} | X_\tau, \tau \leq t)$$

Существуют различные способы представления общей линейной модели. Для нашей модели мы имеем

$$\nabla^3 x_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) a_t, \text{ где} \quad (1)$$

B -оператор сдвига; B
 $a_t = a_{t-1}$, a_t – белый шум. Белый шум – это последовательность $\{a_t\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией.

Ошибка модели (1) определяется по формуле

$$e_t(k) = X_{t+k} - X_t^*(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j a_{t+k-j}, \text{ где } \psi_j = -\theta_j, j = 1, q, \psi_j = 0 \text{ при } j > q.$$

$$(2)$$

Соотношениями (1)-(2) формально полностью решается проблема прогнозирования.

$$w_t \equiv \nabla^3 x_t = (I - B)^3 x_t = \left(\sum_{j=0}^3 (-1)^j C_3^j B^j \right) x_t =$$

$$= \sum_{j=0}^3 (-1)^j C_3^j x_{t-j} = x_t - 3x_{t-1} + 3x_{t-2} - x_{t-3}$$

Если ввести обратный к ∇ оператор

$$S = \nabla^{-1} = (I - B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} B^j$$

то, получим $x_t = S^d w_t$. Здесь S-называется оператором суммирования (т.к. $Sx_t = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \dots$).

Модель $\nabla^3 x_t = \theta(B)a_t$ можно представить через текущее предшествующее значения белого шума;

$$\nabla^3 x_t = \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1} - \theta_2 \alpha_{t-2} = \alpha_t + \psi_1 \alpha_{t-1} + \psi_2 \alpha_{t-2} \equiv \Psi(B)\alpha_t. \text{ т.е.}$$

$$x_t - 3x_{t-1} + 3x_{t-2} - x_{t-3} = \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1} - \theta_2 \alpha_{t-2}$$

и переходя к условным математическим ожиданиям при заданных $X_\tau, \tau \leq t$ для $t \rightarrow t+1$ получаем прогноз на один шаг вперед

$$X_t^*(1) = 3x_t - 3x_{t-1} + x_{t-2} - \theta_1 \alpha_t - \theta_2 \alpha_{t-1}$$

Если перейти $t \rightarrow t+k$ то имеем

$$x_{t+k} = 3x_{t+k-1} - 3x_{t+k-2} + x_{t+k-3} - \theta_1 \alpha_{t+k-1} - \theta_2 \alpha_{t+k-2}$$

учитывая $X_t^*(j) = E(X_{t+k} | X_\tau, \tau \leq t) \equiv [x_{t+j}]_t = X_t^*(j)$ при $1 \leq j < k$

$$[x_{t-j}]_t = x_{t-j}$$

$$[a_{t-j}]_t = a_{t-j} \quad 0 \leq j \leq q \quad [a_{t+j}]_t = 0, \quad j \geq 1$$

получим $X_t^*(2) = 3x_{t+1} - 3x_t + x_{t-1} - \theta_2 \alpha_t = 3X_t^*(1) - 3x_t + x_{t-1} - \theta_2 \alpha_t$

и так далее. У нас в таблице показаны значение

$$X_t^*(1), X_t^*(2), X_t^*(3), X_t^*(4) \text{ и } X_t^*(5).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бокс Дж., Дженкинс Т. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып.1,2.-М.: Мир , 1974.
2. Боровиков В.П., Ивченко Г.И. Прогнозирование в системе STATISTICA в среде WINDOWS -М.: «Финансы и статистика» 2000.