

УДК 626.627.03.042.019.3

**СРАВНЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ
УСТОЙЧИВОСТИ ГЕОТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА ПРИМЕРЕ
ОПОЛЗНЕВОГО СКЛОНА «ТЕКТОНИК»**

Б.А. Чукин, Э.А. Ким, Р.Б. Чукин

ИГиОН НАН КР

В последнее время широкое распространение получили вероятностные методы оценки устойчивости геотехнических объектов. Наиболее достоверным в определении вероятности устойчивости геотехнических объектов является метод прямых статистических испытаний - метод Монте-Карло. В научной литературе рекомендуется использовать и другие методы, в частности, - метод статистической линеаризации. К основному достоинству метода статистической линеаризации относят и тот факт, что статистических испытаний по сравнению с методом Монте-Карло требуется значительно меньше. В некоторых публикациях отмечается, что метод статистической линеаризации в отличие от метода Монте-Карло дает возможность оценить значимость неизвестных факторов на устойчивость исследуемого объекта. Отмечаем, что современные программы по статистической обработке данных, позволяют дать такую оценку и при использовании метода Монте-Карло. Определение значимости факторов является важной составляющей для принятия эффективных инженерных решений, направленных на повышение устойчивости исследуемого объекта.

Мы поставили перед собой задачу сравнить различные вероятностные методы оценки устойчивости на примере оползневого склона «Тектоник». Расчетная модель оползневого склона «Тектоник» была построена на основании геологической модели, предоставленной зав. лабораторией «Горной геофизики и экзогеодинамики» ИГиОН НАН КР к.т.н. Алешиным Ю.Г. В качестве случайных величин были выбраны прочностные свойства: сцепление (C) и угол внутреннего трения (φ) трех расчетных элементов. Расчетные элементы определены на основании инженерно-геологических элементов. В результате, оползневой склон «Тектоник» представлен расчетной моделью, состоящей из суглинка лессовидного мощностью до 3 м, глинистых грунтов основной толщи покровных отложений мощностью до 26 м и глинистых грунтов на границе с песчаниками мощностью до 2 м.

Для выполнения расчетов вероятностными методами необходимо знать закон распределения случайных величин. Было принято решение, что прочностные и деформационные свойства всех трех грунтов подчиняются нормальному закону распределения. Значения математического ожидания $M(x)$ прочностных свойств, модуля деформации (E) и коэффициент Пуассона (μ) для грунтов выбраны по рекомендациям СНиП 2.02.02-85 «Основания гидротехнических сооружений» /1/ и приводятся в таблице 1.

Таблица 1.

Грунты	I_L	e	Из СНиП 2.02.02-8 «Основания гидротехнических сооружений»			
			C , кПа	φ , град.	E , МПа	μ
Суглинок лессовидный	$0 < I_L \leq 0.25$	0,65	31	24	22	0.36

покровный мощностью до 3 м						
Глинистые грунты основной толщи покровных отложений мощностью до 26 м.	$0 < I_1 \leq 0.25$	0,65	68	20	24	0.34
Глинистые грунты на границе с песчаниками, переувлажненные, мощностью до 2 м.	$0.25 < I_1 \leq 0.5$	0,65	57	18	21	0.4

Значения стандартных отклонений $\sigma(x)$ определены из предположения, что коэффициент вариации ϑ для прочностных свойств равен 0.3, - по формуле:

$$\sigma(x) = \vartheta * M(x) \quad (1)$$

Вероятностная оценка устойчивости оползневого склона «Тектоник» методом Монте-Карло.

В качестве базовых значений вероятностной оценки устойчивости оползневого склона «Тектоник» были выбраны результаты, полученные при реализации методом Монте-Карло. Особенность метода Монте–Карло заключается в необходимости проводить вычисления устойчивости при значениях случайных величин, полученных в результате разыгрывания случайных величин, согласно закону их распределения /2/. Для разыгрывания значений случайных величин С и ф была использована функция «Генерация случайных величин» в Excel. Количество экспериментов составило 80. Расчеты устойчивости выполнены на программе FLAC.

В таблице 2 приводятся значения математического ожидания (Mx) и стандартного отклонения $\sigma(x)$ для выбранных случайных величин.

Там же приводятся значения C и φ , полученные в результате разыгрывания. В последних двух столбцах приводятся значения коэффициента устойчивости (K_u), полученные для соответствующих случайных значений C и φ . Цифра 1 соответствует случаю, когда $K_u < 1$. Таблица 2 приведена в сокращенном виде.

Таблица 2.

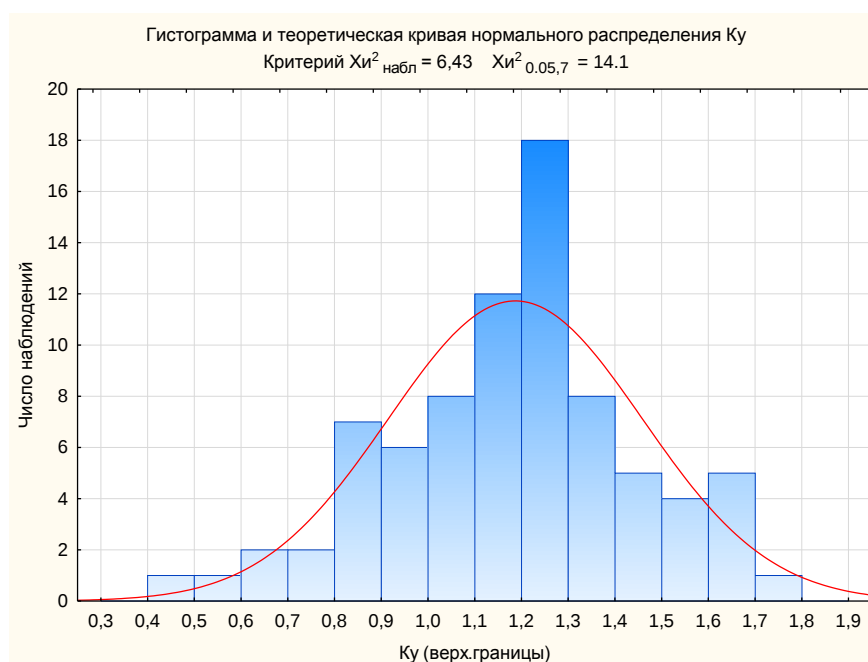
Результаты расчета устойчивости при значениях случайных величин								
	Суглинок лессовидный		Глина-1		Глина-2		FLAC	Ky<1
	C	Fi	C	Fi	C	Fi		
	кПа	град.	кПа	град.	кПа	град.		
M(x)	31	24	68	20	57	18	Ky	
б(x)	9.3	7.2	20.4	6	17.1	5.4		
v(x)	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3		
1	28.2	24.0	42.4	17.3	79.0	25.1	1.17	
2	19.1	23.8	78.3	19.4	31.6	25.0	1.48	
3	33.3	29.5	74.8	26.9	68.4	23.0	1.65	
8	28.8	24.5	35.1	8.9	48.2	19.4	0.71	1
9	41.2	21.7	67.9	9.3	66.5	18.9	1.01	
16	11.3	22.4	39.3	25.2	86.3	12.0	1.19	
17	25.7	25.0	44.5	10.0	30.8	20.1	0.84	1
18	27.2	31.5	43.9	17.6	85.1	33.0	1.20	
19	32.3	24.4	79.5	23.0	67.1	7.7	0.88	1
20	27.6	14.3	84.7	20.1	54.4	26.7	1.64	
21	28.0	20.6	77.4	16.3	63.5	10.2	0.97	1
55	38.0	25.0	55.1	15.1	44.1	13.3	0.97	1
56	35.3	18.7	96.0	16.5	60.2	35.6	1.59	
57	39.1	23.6	61.7	7.9	50.8	17.7	0.88	1
58	36.5	20.0	72.4	7.2	54.7	16.1	0.94	1
80	36.9	29.4	40.5	13.9	73.2	24.6	0.99	1

В таблице 3 приведены результаты статистической обработки полученных значений K_u , а также подсчитанные значения относительной частоты $K_u < 1 = 19/80$ и вероятность $K_u < 1$ при $\bar{X} = 1.187$ и $\sigma = 0.272$.

Таблица 3.

Среднее значение	1.187	Число наблюдений $K_y < 1$	Общее число выборок	Относительная частота $K_y < 1$	Вероятность $P(K_y < 1)$
Стандартное отклонение	0.272				
Дисперсия	0.074	19	80	0.2375	0.246

Проверка гипотезы о нормальном законе распределения полученных значений K_y по критерию Пирсона выполнялась на программе Statistica. На рис. 1 представлена гистограмма распределения K_y . Наблюдаемое значение критерия Пирсона $X^2_{\text{набл.}} = 6.43$, критическая точка $X^2_{\text{кр}} = 14.1$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы с учетом объединения частот ($n_i < 5$) $k = 7$. Так как $X^2_{\text{набл.}} < X^2_{\text{кр}}$, нет оснований отвергать гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности K_y .

Рис. 1 – Гистограмма и теоретическая кривая нормального распределения K_y .

Значения K_y оползневого склона «Тектоник» подчиняются нормальному закону распределения. Так как K_y , как случайная величина, распределяется по нормальному закону, то это дает нам

право приступить к определению минимального объема выборки и к вычислению интервальных оценок.

Минимальный объем выборки (расчетов), при которой с надежностью $\gamma=0,95$ точность оценки математического ожидания K_y генеральной совокупности по выборочной средней $K_y = 1.187$ равна $\delta=0.1$ - вычисляется по формуле: $n=t^2\sigma^2/\delta^2$ (2)

где n -минимальный объем выборки, t - значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, σ – среднеквадратическое отклонение, δ – точность оценки.

Результаты расчетов минимального объема выборки сведены в таблицу 4.

Таблица 4.

Расчет минимального объема выборки

Надежность	0.95	Функции Лапласа $\Phi(t) = 0,9/2$	0.475
Стандарт	0.272	Табличное значение t	1.96
Точность оценки K_y	0.1	Минимальный объем выборки должен быть не ниже	29

Таким образом, количество расчетов (80) превышает необходимый объем выборки, что дает основание перейти к вычислению интервальных оценок.

В интервальной оценке с надёжностью $\gamma=0.95$ математического ожидания K_y нормально распределённого количественного признака X по выборочной средней $\bar{K}_y$ при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности (т.к. объем выборки $n>30$) - служит доверительный интервал:

$$\bar{K}_y - t(\sigma/\sqrt{n}) < K_y < \bar{K}_y + t(\sigma/\sqrt{n}), \quad (3)$$

где $t(\sigma/\sqrt{n})=\delta$ – точность оценки, n –объем выборки, t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t)=\gamma/2$;

$\bar{K}_y=1.187$; $\sigma=0.272$; $n=80$; $\gamma=0.95$; t найдем из соотношения $\Phi(t)=0.95/2=0.475$ по таблице функции Лапласа значение $t=1.96$

Искомая точность оценки составит $1.96(0.272/(80^{0.5}))=0.06$.

Искомый доверительный интервал математического ожидания

$$1.13 < M(K_y) < 1.25$$

В интервальной оценке с надёжностью $\gamma=0.95$ среднего квадратического отклонения $\sigma(K_y)$ нормального распределённого количественного признака K_y по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению $s(K_y)$ - служит доверительный интервал:

$$0 < \sigma(K_y) < s(K_y)(1 + q) \quad (\text{при } q > 1), \quad (4)$$

где q находят по таблице по заданным $n = 80$ и $\gamma=0.95$, $q=0.161$.

Искомый доверительный интервал стандарта $0.228 < \sigma(K_y) < 0.316$.

В интервальной оценке с надёжностью $\gamma=0.95$ неизвестной вероятности $P(K_y < 1)$ биномиального распределения (биномиальное распределение приближается к нормальному распределению) по относительной частоте w ($K_y < 1$) - служит доверительный интервал (с приближенными концами p_1 и p_2), $p_1 < p < p_2$,

где
$$p_1 = \frac{n}{t^2 + n} \left[w^2 + \frac{t^2}{2n} - t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n} \right)^2} \right], \quad (5)$$

$$p_2 = \frac{n}{t^2 + n} \left[w + \frac{t^2}{2n} + t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n} \right)^2} \right], \quad (6)$$

где n – общее число испытаний; m – число появлений события $K_y < 1$; w – относительная частота, равная отношению m/n ; t – значение аргумента функции Лапласа, при котором $\Phi(t)=\gamma/2$, γ – заданная надёжность, $n=80$; $m=19$; $w=0.238$; $t=1.96$.

Искомый доверительный интервал для вероятности

$$0.158 < P(K_y < 1) < 0.341.$$

Вероятностная оценка устойчивости оползневого склона «Тектоник» методом статистической линеаризации

K_y , как случайная величина, является функцией случайных величин C_i и φ_i . Мы приняли, что случайные величины C_i и φ_i подчиняются нормальному закону распределения. В общем виде функция $K_y=f(C_i, \varphi_i)$ - нелинейная, но в области практических значений C_i и φ_i предполагаем, что мало отличается от линейной. Функция $K_y=f(C_i, \varphi_i)$ малой окрестности точки при значениях математического ожидания $M(C_i)$ и $M(\varphi_i)$ заменяется линейной. Это равносильно тому, чтобы в разложении функции в ряд Тейлора около точки $M(C_i)$, $M(\varphi_i)$ сохранить только члены первого порядка [2].

$$K_y=f(C_i, \varphi_i) \approx f[M(C_i), M(\varphi_i)] + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_m * (X_i - m_{x_i}) \quad (7)$$

где n - число случайных величин (C_i, φ_i) , $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_m$ - частные производные функции K_y по соответствующим случайным величинам C_i, φ_i ,

m_{x_i} - математическое ожидание соответствующей случайной величины, $(X_i - m_{x_i})$ отклонение от значения математического ожидания на величину стандарта $\sigma(C_i, \varphi_i)$ соответствующей величины.

В результате математическое ожидание K_y можно получить вычислением K_y при значениях C_i и φ_i на уровне их математического ожидания $M(C_i)$ и $M(\varphi_i)$.

Стандартное отклонение $\sigma(K_y)$ в общем виде вычисляется по зависимости

$$\sigma(K_y)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_m^2 * \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_m * \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_m * r_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} \quad (8)$$

где r_{ij} коэффициент корреляции величин X_i, X_j .

Необходимо отметить, что корреляция между C_i и φ_i для одного инженерно-геологического элемента может быть только со знаком минус. И если корреляция существует, то стандартное отклонение $\sigma(Ky)$ уменьшается, что, в конечном счете, увеличивает вероятность устойчивости геотехнического объекта. Ввиду отсутствия корреляционных зависимостей для C_i и φ_i и идя по пути увеличения вероятности обрушения, стандартное отклонение $\sigma(Ky)$ будем вычислять из предположения отсутствия корреляции между C_i и φ_i .

$$\text{В этом случае: } \sigma(Ky)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m * \sigma_{x_i}^2 \quad (9)$$

Вычисление частных производных производилось методом конечных разностей.

В таблице 5 приводятся результаты расчетов Ky по методу статистической линеаризации. Необходимо отметить, что расчеты Ky были выполнены как при значениях отклонения от математического ожидания на $+\sigma(C_i, \varphi_i)$, так и при $-\sigma(C_i, \varphi_i)$. В таблице 5 значения с отклонением плюс выделены коричневым цветом, а значения с отклонением минус – зеленым.

Таблица 5.

	Суглинок лессовидный		Глина-1		Глина-2		FLAC Ky
	C	Fi	C	Fi	C	Fi	
	кПа	град.	кПа	град.	кПа	град.	
M(x)	31	24	68	20	57	18	1.3
B(x)	9.3	7.2	20.4	6	17.1	5.4	
v(x)	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	
M(X _i)	31	24	68	20	57	18	
1	40.3	24	68	20	57	18	1.3
2	21.7	24	68	20	57	18	1.3
3	31	31.2	68	20	57	18	1.3
4	31	16.8	68	20	57	18	1.3
5	31	24	88.4	20	57	18	1.32
6	31	24	47.6	20	57	18	1.28

7	31	24	68	26	57	18	1.32
8	31	24	68	14	57	18	1.22
9	31	24	68	20	74.1	18	1.41
10	31	24	68	20	39.9	18	1.19
11	31	24	68	20	57	23.4	1.51
12	31	24	68	20	57	12.6	1.04

В результате были получены следующие значения:

Математическое ожидание $K_y = 1.3$.

Стандартное отклонение $\sigma(K_y)$ при значениях $+\sigma(C_i, \varphi_i) = 0.239$.

Стандартное отклонение $\sigma(K_y)$ при значениях $-\sigma(C_i, \varphi_i) = 0.294$.

Вероятность $P(K_y < 1)$ при значениях $+\sigma(C_i, \varphi_i) = 0.104$.

Вероятность $P(K_y < 1)$ при значениях $-\sigma(C_i, \varphi_i) = 0.154$.

Необходимо выполнить проверку: покрывают ли соответствующие доверительные интервалы значения, полученные методом линеаризации. Результаты проверки сведены в таблицу 6.

Таблица 6

Доверительный интервал с надёжностью $\gamma=0.95$ для оценки математического ожидания K_y		
1.13	$M(K_y)=1.3$	1.25
Доверительный интервал с надёжностью $\gamma=0.95$ для оценки стандартного отклонения K_y		
0.228	$\sigma(K_y)=0.239 (+)$ $\sigma(K_y)=0.239 (-)$	0.316
Доверительный интервал с надёжностью $\gamma=0.95$ для оценки вероятности $K_y < 1$		
0.158	$P(K_y)=0.104 (+)$ $P(K_y)=0.154 (-)$	0.341

Значение математического ожидания $M(K_y)$ и значения вероятности $P(K_y < 1)$ выходят за границы доверительного интервала. Значения стандартного отклонения $\sigma(K_y)$ попадают в границы доверительного интервала. Таким образом использование метода

линеаризации для вероятностной оценки устойчивости оползневого склона «Тектоник» вызывает сомнение. Этот вывод побудил нас прибегнуть к методу статистической линеаризации с уточнением.

Вероятностная оценка устойчивости оползневого склона «Тектоник» методом статистической линеаризации с уточнением.

Метод статистической линеаризации с уточнением основан на сохранении в разложении функции не только линейных членов, но и членов более высокого порядка и оценке погрешностей, связанных с этими членами [2]. Разлагая функцию в ряд Тейлора в окрестности точки при значениях математического ожидания $M(C_i)$ и $M(\varphi_i)$ и сохраняя в разложении члены не выше второго порядка, имеем приближенно:

$$K_y = f(C_i, \varphi_i) \approx f[M(C_i), M(\varphi_i) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m (X_i - m_{x_i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \right)_m] \quad (10)$$

Для уточнения численных значений $M(K_y)$ используется зависимость: $M(K_y) = [M(C_i), M(\varphi_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \right)_m * D_{x_i}]$ (11)

Для уточнения стандартного отклонения $\sigma(K_y)$ используется зависимость: $\sigma(K_y)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m * D_{x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \right)_m^2 * D_{x_i}^2$ (12)

где D_{x_i} - дисперсия соответствующей величины.

Как видно, для расчетов уточненных значений требуются вычисления не только частных производных первого порядка, но и частных производных второго порядка. Используя значения, приведенные в таблице 5, и формулы метода конечных разностей - вычисляем производные.

В результате были получены следующие значения:

Уточненное значение математического ожидания $K_y = 1.245$.

Уточненное значение стандартного отклонения $\sigma(K_y) = 0.271$.

Уточненное значение вероятности $P(K_y < 1) = 0.183$.

Выполним проверку: покрывают ли соответствующие доверительные интервалы значения, полученные методом линеаризации с уточнением. Результатами проверки сведены в таблицу 7.

Таблица 7.

Доверительный интервал с надёжностью $\gamma=0.95$ для оценки математического ожидания K_y		
1.13	$M(K_y)=1.245$	1.25
Доверительный интервал с надёжностью $\gamma=0.95$ для оценки стандартного отклонения K_y		
0.228	$\sigma(K_y)=0.271$	0.316
Доверительный интервал с надёжностью $\gamma=0.95$ для оценки вероятности $K_y < 1$		
0.158	$P(K_y)=0.183$	0.341

Как видим, все значения попадают в границы доверительных интервалов.

Выполненные исследования по сравнению вероятностных методов оценки устойчивости геотехнических объектов на примере оползневого склона «Тектоник» говорят о том, что для вероятностной оценки, наряду с методом Монте–Карло, можно использовать метод статистической линеаризации с уточнением.

ЛИТЕРАТУРА

1. СНиП 2.02.02-85 «Основания гидротехнических сооружений».
2. Беллендир Е.Н., Ивашинцов Д.А., Стефанишин Д.В. и др. Вероятностные методы оценки надежности грунтовых гидротехнических сооружений. - СПб.: ОАО «ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева», том 1, 2, 2004.