УДК 519.622+519.651

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ЖАКЫНДАТЫП ЧЫГАРУУДА СПЛАЙН-ФУНКЦИЯЛАРДЫ КОЛДОНУУ

Бийбосунов А. И., Маданбекова Э.Э., Абылкасымова А.К.
И.Раззаков атындагы КМТУ, К.Тыныстанов атындагы ЫМУ, Каракол ш.

Бул макалада дифференциалдык теңдемелерди сандык методдор менен жакындатып чыгарууда сплайн-функцияларды колдонуунун маанилүүлүгү жана эффективдүүлүгү каралат. Заманбап илимде жана инженерияда көптөгөн реалдуу процесстерди сүрөттөгөн дифференциалдык теңдемелер аналитикалык жол менен так чечилбегендиктен, сандык методдорго кайрылуу зарылчылыгы келип чыгат. Макалада сплайндардын математикалык негиздери, алардын жылмакайлык жана жогорку тактык касиеттери баяндалат. Ошондой эле, сплайн-функцияларды колдонуу аркылуу алынган дискреттик чечимдерди үзгүлтүксүз жана жылмакай функцияларга айландыруу ыкмалары, ошондой эле алардын сандык эсептөөлөрдөгү артыкчылыктары талданат. Макаланын жыйынтыгында сплайн-функциялардын дифференциалдык теңдемелерди чечүүдөгү актуалдуулугу жана аларды практикада колдонуу потенциалы көрсөтүлөт.

Баштапкы сөздөр: Дифференциалдык теңдемелер, сандык методдор, сплайн-функциялар, интерполяция, четки маселе, матрица, система

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Бийбосунов А. И., Маданбекова Э.Э., Абылкасымова А.К.
КГТУ им.И.Раззакова, ИГУ им.К.Тыныстанова, г.Каракол

В данной статье рассматривается значимость и эффективность использования сплайн-функций при численном приближенном решении дифференциальных уравнений. В современной науке и инженерии многие реальные процессы описываются дифференциальными уравнениями, которые часто не могут быть решены аналитически, что приводит к необходимости применения численных методов. В статье излагаются математические основы сплайнов, их свойства гладкости и высокой точности. Также анализируются методы преобразования дискретных решений, полученных с использованием сплайн-функций, в непрерывные и гладкие функции, а также их преимущества в численных расчетах. В заключении статьи показывается актуальность сплайн-функций в решении дифференциальных уравнений и их потенциал для практического применения.

Ключевые слова: Дифференциальные уравнения, численные методы, сплайн-функции, интерполяция, краевая задача, матрица, система.

USING SPLINE FUNCTIONS IN THE APPROXIMATE SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Biybosunov A.I, Madanbekova E.E., Abylkasymova A.K.
KSEU named after I. Razzakov, ISU named after K. Tynystanov, c. Karakol

This article explores the significance and effectiveness of using spline functions in the numerical approximate solution of differential equations. In modern science and engineering, many real-world processes are described by differential equations that often cannot be solved analytically, necessitating the application of numerical methods. The article outlines the mathematical foundations of splines, highlighting their properties of smoothness and high accuracy. It also analyzes methods for converting discrete solutions obtained using spline functions into continuous and smooth functions, as well as their advantages in numerical computations. The article concludes by demonstrating the relevance of spline functions in solving differential equations and their potential for practical application.

Keywords: Differential equations, numerical methods, spline functions, interpolation, boundary value problem, matrix, system.

Киришүү

Колдонмо математикада функцияларды көп учурда жакындатып көрсөтүүгө (сүрөттөөгө) туура келет. Мындай жакындатуунун классикалык аппараттары болуп мүчөлөр жана рационалдык бөлчөктөр эсептелет. Функцияларды көп мүчөлөр менен жакындатуу теориясы көп мүчөлөр менен жакындатуу теориясы көптөгөн ири математиктердин эмгектеринде иштелип чыккан. Өзгөчөлүктөрү бар жана өтө жылма эмес функцияларды жакындатууга көп мүчөлөр менен рационалдык бөлчөктөрдүн кемчиликтери менен байкалат, себеби алардын кандайдыр бир чекиттин аймагындагы мүнөздөмөлөрү бүткүл областка жайылат. Эгерде жакындатуучу (аппроксимациялоочу) көп мүчөнү биз каалагандай ийкемдүү кылып өзгөртүүгө мүмкүн болсо, каалагандай жыйынтык алынмак. Теориялык изилдөөлөрдө жана практикада колдонууда жакшы ийгилике жетишкен аппараттардын бири-Сплайн-функциялар.

Сплайндар деп – көп мүчөлөрдүн ар кандай бөлүктөрүнөн кураштырып жасалган функцияларды аташат. Эң жөнөкөй сплайндар – сынык сызыктар. Сплайн – эң жука, ичке, ийилчээк рейка деп элестетүүгө болот, анын ар кайсы чекиттерине ар кандай салмактарды илип, каалагандай ийри сызыкты алууга мүмкүн.

Математикада эң жөнөкөй сплайн өзү узгүлтүксүз, биринчи жана экинчи туундуулары да үзгүлтүксүз, үчүнчү туундусу бөлүктөп бириккен чекиттерде чектүү секириктүү болушу мүмкүн. Практикада сплайн чиймечинин ичке ийилчээк сызгычын элестетет. Сплайндар эң жакшы аппроксимациялоочу функциялар катарында колдонмо маселелерде кеңири колдонулат [1].

Изилдөө методдору

Сплайндар Коши маселесин жана кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн четки маселелерди чыгарууда ийгиликтүү колдонулат. Биз экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме үчүн эки чекиттүү четки маселени карайбыз [2]:

$$Ly = y'' + p(x)y'q(x)y = r(x), \qquad a \le x \le b,$$
$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = a_0, \qquad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = b_0. \tag{1}$$

$x = a$ үчүн

$2M_0 + M_1 = \frac{b}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0'\right)$ (*) четки шарттарга байланышкан фундаменталдык сплайндарды киргизебиз. Бардык кубдук сплайндарга болгон,

$\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$

торчодо аныкталган $A_{\Delta,k}(x)$ $(k = 0,1,\cdots,N)$ жана $B_{\Delta,k}(x)$ $(k = 0, N)$ сплайндарды (алардын саны $N + 3$) ушундай атайбыз, алар төмөнкү шарттар менен аныкталат:

$$A_{\Delta,k}(x_j) = \delta_{k,j} \qquad (j = 0,1,\cdots,N),$$

$$A'_{\Delta,k}(x_i)=0 \qquad (i=0,N),\ k=0,1,\cdots,N,$$
$$B_{\Delta,k}(x_j)=0 \qquad (j=0,1,\cdots,N),$$
$$B'_{\Delta,k}(x_i)=\delta_{k,i} \qquad (i=0,N), \qquad k=0,N, \tag{2}$$
мында $\delta_{k,j}$ – Кронекер символу.

Дифференциалдык теңдеменин чыгарылышын интерполяциялоочу жана (*) четки шарттарды канааттандыруучу кубдук сплайнды

$$S_\Delta(y;x)=\sum_{j=0}^{N} A_{\Delta,j}(x)y(x_j)+y'(a)B_{\Delta,0}(x)+y'(b)B_{\Delta,k}(x) \tag{3}$$
түрдө жазууга болот.

$$\mathrm{E}_\Delta(y;x)=y(x)-S_\Delta(y;x) \tag{4}$$
деп белгилейбиз. Эгерде (1) маселенин $\mathrm{C}^2[a,b]$классына тиешелүү жалгыз чыгарылышы болсо, анда $E_\Delta^{(\alpha)}(y,x)=0\ (\|\Delta\|^{2-\alpha})$ $\quad(\alpha=0,1,2)$ шарты $[a,b]$ кесиндисинде *x* ке карата бир калыпта аткарылат.

(4) барабардыкты эске алуу менен
$$LS_\Delta(y;x)-r(x)=S''_\Delta(y;x)+p(x)S'_\Delta(y;x)+q(x)S_\Delta(y;x)-r(x)=G_\Delta(y;x)$$
барабардыкты жаза алабыз, мында
$$G_\Delta(y;x)=-E''_\Delta(y;x)-p(x)E'_\Delta(y;x)-q(x)E_\Delta(y;x),$$
ошондуктан $G_\Delta(y;x)=0(\|1\|)$. (3) формуланы (1) формулага коебуз, анда
$$\sum_{j=0}^{N} y(x_j)LA_{\Delta,j}(x)+y'(a)LB_{\Delta,0}(x)+y'(b)LB_{\Delta,N}(x)-r(x)=G_\Delta(y;x). \tag{5}$$
Демек, $y_j=y(x_j)$ $\quad(j=0,1,\cdots,N)$ ординаталары жана $y'_0=y'(a),\ y'_N=y'(b)$ кыйшаюулары
$$\sum_{j=0}^{N} y_jLA_{\Delta,j}(x_i)+y'_0LB_{\Delta,0}(x_i)+y'_NLB_{\Delta,0}(x_i)=r(x_i)+G_\Delta(y;x_i)\ (i=0,1,\cdots,N),$$
$$a_1y_0+a_2y'_0=a_0, \qquad b_1y_N+b_2y'_N=b_0. \tag{6}$$
төмөнкүдөй белгилөөлөрдү кийиребиз:

$Y_\Delta=(y'_0,y_0,y_1,\cdots,y_N,y'_N)^T$,

$G_\Delta=(0,G_\Delta(y;x_0),\cdots,G_\Delta(y;x_N),0)^T$,

$R_\Delta=(a_0,r(x_0),\cdots,r(x_N),b_0)^T$,

жана H_Δ матрицасы төмөнкүдөй болсун:
$$H_\Delta=\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 0 & \cdots & & \\ LB_{\Delta,0}(x_0) & LA_{\Delta,0}(x_0) & LA_{\Delta,1}(x_1) & \cdots & LA_{\Delta,N}(x_0) & LB_{\Delta,N}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ LB_{\Delta,0}(x_N) & LA_{\Delta,0}(x_N) & LA_{\Delta,1}(x_N) & \cdots & LA_{\Delta,N}(x_N) & LB_{\Delta,N}(x_N) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$
анда $\qquad H_\Delta Y_\Delta=R_\Delta+G_\Delta$.

$G_\Delta(y;x_i)$ чоңдуктары белгисиз. Бул методдо G_Δ чоңдугун нөл менен алмаштырып $H_\Delta Y_\Delta^1=R_\Delta$ теңдемесинен Y_Δ^1 жакындатылган мааниси табылат. Эгерде H_Δ^{-1} тескери матрицасы бар болсо жана $\left\|H_\Delta^{-1}G_\Delta\right\| \to 0$ умтулса ($\|\Delta\| \to 0$ умтулганда), анда

$$H_\Delta Y_\Delta^1 = R_\Delta \tag{7}$$

Теңдемесинин чыгарылыштары $[a,b]$ кесиндисинде $y(x)$ функциясына жыйналуучу сплайндарды аныктайт [3].

Методдун колдонулушун көрүү үчүн

$$y'' - \alpha^2 y = 0, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad y(0) = y(1) = 1 \tag{8}$$

четки маселени алабыз. H_Δ матрицасын жазабыз:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B''_{\Delta,0}(x_0) & A''_{\Delta,0}(x_0) - \alpha^2 & A''_{\Delta,1}(x_0) & \cdots & A''_{\Delta,N}(x_0) & B''_{\Delta,N}(x_0) \\ B''_{\Delta,0}(x_1) & A''_{\Delta,0}(x_1) & A''_{\Delta,1}(x_1) - \alpha^2 & \cdots & A''_{\Delta,N}(x_1) & B''_{\Delta,N}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ B''_{\Delta,0}(x_N) & A''_{\Delta,0}(x_N) & A''_{\Delta,1}(x_N) & \cdots & A''_{\Delta,N}(x_N) - \alpha^2 & B''_{\Delta,N}(x_N) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

(7) теңдемени төмөнкү $N+3$ тартиптеги квадраттык матрицага көбөйтөбүз:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & [A] & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

Анда(7) теңдеме төмөнкү түргө келет:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b}{h_1} & -\frac{b}{h_1^2} - 2\alpha^2 & \frac{6}{h^2} - \lambda_0\alpha^2 & & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{h_1(h_1+h_3)} - \mu_1\alpha^2 & -\frac{6}{h_1h_2} - 2\alpha^2 & \frac{6}{h_2(h_1+h_2)} - \lambda_1\alpha^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{h_2(h_2+h_3)} - \mu_2\alpha^2 & -\frac{6}{h_2h_3} - 2\alpha^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{h_3(h_3+h_4)} - \mu\alpha^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{6}{h_N^2} - \mu_N\alpha^2 & -\frac{6}{h_N^2} - 2\alpha^2 & \frac{6}{h_N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} *$$

$$* \begin{bmatrix} y'_0 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \\ y'_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Мында $-y'_0 + (y_1 - y_0)/h_1$ санын u_0 гө, жана $-(y_N - y_{N-1})/h_N$ санын u_N ге алмаштырабыз. Натыйжада төмөнкү системага келебиз:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{6}{h_1} & -2\alpha^2 & -\lambda_0\alpha^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \frac{6}{h_1(h_1+h_3)} - \mu_1\alpha^2 & -\frac{6}{h_1h_2} - 2\alpha^2 & \frac{6}{h_2(h_1+h_2)} - \lambda_1\alpha^2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\mu\alpha^2 \quad -2\alpha^2 & \frac{6}{h_N}
\end{bmatrix} *
$$

$$
* \begin{bmatrix} u_0 \\ y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Эгерде $\|\Delta\|$ саны жетишерлик кичине болсо, анда коэффициенттердин матрицасынын башкы диагоналы үстөмдүк кылат жана тескери матрицанын нормасы бир калыпта чектелген болот [3].

Бул процессте каталардын вектору G_Δ нормасы чектелген (9) матрицага жана (10) системанын тескери матрицасына (анын нормасы да чектелген) көбөйтүлөт. Мындан, сплайндын $y(x)$ функциясына жыйналуусу келип чыгат. Чындыгында эле, $\|\Delta\| \to 0$ умтулганда $\|[y'(x_0) - y'_0, y(x_0) - y_0^t, y(x_N) - y_N^t,\ y^t(x_N) - y''_N\ ]\| \to 0$ нөлгө умтулат.

1-таблицада $y'' - 100y = 0,\ 0 \le ч \le 1,\ y(0) = y(1) = 1$ четки маселенин так жана жакындатылган чыгарылыштары берилген. Сплайндар 11 жана 21 түйүндүү торчолордо түзүлгөн.

Таблица 1.

x	y тин так мааниси	$y(N = 10)$	$y(N = 20)$	y'тин так мааниси	$y'(N = 10)$	$y'(N = 20)$
0,00	1,00000	1,00000	1,00000	-9,9991	-10,1152	-10,1028
0,05	0,60657	-	0,60333	-	-	-
0,10	0,36799	0,35107	0,36406	-	-	-
0,15	0,22332	-	0,21975	-	-	-
0,20	0,13566	0,12343	0,13277	-	-	-
0,25	0,08263	-	0,08042	-	-	-
0,30	0,05070	0,04390	0,04906	-	-	-
0,35	0,03170	-	0,03049	-	-	-
0,40	0,02079	0,01075	0,01987	-	-	-
0,45	0,01520	-	0,01444	-	-	-
0,50	0,01348	0,01065	0,01277	-	-	-

Маселенин чыгарылышы кесиндинин ортосуна карата симметриялуу болгондуктан кесиндинин биринчи жарымындагы маанилер берилди.

Корутунду: Бул макалада дифференциалдык теңдемелерди сандык чыгарууда сплайн-функциялардын колдонулушунун негизги аспектилери каралып чыкты. Татаал математикалык моделдерди жана реалдуу кубулуштарды сүрөттөөчү көптөгөн дифференциалдык теңдемелерди аналитикалык жол менен чечүү мүмкүн эмес болгондуктан, сандык методдор заманбап илимий жана инженердик эсептөөлөрдүн ажырагыс бөлүгү болуп калды.

Сплайн-функциялар, өздөрүнүн уникалдуу жылмакайлык, ийкемдүүлүк жана жогорку тактык касиеттери менен, дискреттик маалыматтардын негизинде үзгүлтүксүз жана дифференциалдануучу чечимдерди курууга мүмкүндүк берет. Макалада белгиленгендей, сплайндар Коши маселесин жана кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн четки маселелерди чыгарууда ийгиликтүү колдонулат жана Эйлер, Рунге-Кутта сыяктуу салттуу сандык методдор менен алынган чекиттик маанилерди интерполяциялоо үчүн гана эмес, ошондой эле чектүү элементтер методу сыяктуу татаал сандык схемалардын негизин түзүү үчүн да колдонулат. Бул дифференциалдык теңдемелердин чечимдерин так жана эффективдүү алууга шарт түзөт.

Жыйынтыктап айтканда, сплайн-функциялар дифференциалдык теңдемелерди сандык чечүү чөйрөсүндө күчтүү жана универсалдуу курал болуп саналат. Алардын артыкчылыктары илимдин жана техниканын ар кандай тармактарында, анын ичинде физика, инженерия, экономика жана биологияда татаал процесстерди моделдөөдө жана талдоодо чоң потенциалды сунуштайт. Келечекте сплайндарды негиздеген жаңы алгоритмдерди иштеп чыгуу жана аларды жогорку өндүрүмдүү эсептөөлөр менен айкалыштыруу актуалдуу багыттардан болот.

Адабияттар

1. Ahlberg J. Nilsson E., Walsh J. Spline Theory and its Applications / J. Ahlberg Nilsson E., Walsh J., World ed., Moscow:, 1972.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П.Б., Кобелков Г.М. Сандык методдор / Бахвалов Н.С., Жидков Н.П.Б., Кобелков Г.М., — 8-бас. (эл.). — Электрондук текст маалыматтар ред., Москва: БИНОМ. Билим лабораториясы, 2015. 639 б. в.
3. Завьялов Ю. С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Сплайн функцияларынын методдору / Завьялов Ю. С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л., Москва: Наука, 1980.