

УДК 517.977

ЦИФРОВОЕ УПРАВЛЕНИЯ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Керимбеков А.К., Аширбаев Б.Ы.

КРСУ им. Б. Ельцина, КГТУ им.И.Раззакова,

В статье предложен способ построения цифрового управления с минимальной энергией. На основе методов разделения движений [1] и момента [2] построен алгоритм решений задачи.

Пусть непрерывный объект задан моделью в пространстве состояний

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где $y = (x, z)'$, x, z – n – мерные векторы переменных состояния,

$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, $A_i (i = \overline{1, 4}) - (n \times n)$, $B_1, B_2 - (n \times r)$ – постоянные матрицы, $u = u(t) - r$ – мерный вектор управления, штрих обозначает транспонирование, $t \in [t_0, t_1]$.

Качество процесса объекта (1) оценивается функционалом

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} u'(t)u(t)dt. \quad (2)$$

Системы управления с цифровыми управляющими устройствами являются дискретными. В связи с этим, в дальнейшем непрерывный объект подвергается дискретизацию.

Пусть в момент времени $t_k = kT$ вектор состояние равен $y(k)$. Тогда решение уравнение (1) при $kT \leq t \leq (k+1)T$ имеет вид

$$y(t) = e^{A(t-kT)}y(k) + \int_{kT}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad (3)$$

где $\Phi = e^{A(t-kT)}$ –переходная матрица однородной системы

$$\dot{y}(t) = Ay(t) \quad (4)$$

Введем замену

$$t = (k + 1)T, \quad \tau = \sigma + kT \quad (5)$$

и будем считать, что на входе объекта используется фиксатор нулевого порядка, т.е. $u(t) = v(k)$ при $kT \leq t \leq (k + 1)T$. Тогда из (3) имеем

$$y[(k + 1)T] = \Phi y(kT) + Fv(k), \quad (6)$$

где $\Phi = e^{AT} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & \Phi_4 \end{pmatrix}$, $F = \int_0^T e^{A(t-\sigma)} d\sigma B = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$, $T > 0$ –малый период квантования.

Теперь сформулируем задачу цифрового управления с минимальной энергией, который состоит в следующем: среди всех допустимых управлений требуется найти управление $v^* = v^*(kT)$ переводящее систему (6) из заданного начального состояние

$$y(t_0) = y(0) = y_0 \quad (7)$$

в конечное состояние

$$y(t_1) = y(1) = y_M, \quad (8)$$

чтобы при этом функционал

$$J(u) = \sum_{k=0}^{M-1} v'(k\mu)v(k\mu) \quad (9)$$

принимал наименьшее возможное значение, где

$$t \in D_T = \{t: t = kT, \quad k = 0, \quad 1, \dots, M - 1\} \subset D = \{t: 0 \leq t \leq 1\}, M = \frac{1}{T}.$$

Так как функционал (9) оценивает затраты энергии в процессе управления[2], задачу (6) – (9) можно рассмотреть как задачу построения цифрового управления с минимальной энергией.

Предполагаем выполненными следующие условия:

I. Матрицы $\Phi_4, -\Phi_1'$ – устойчивы и $\Phi_4 = -\Phi_1'$.

II. Собственные значения $\lambda_i (i = \overline{1, n})$ матрицы $\Phi_4 = -\Phi_1'$ удовлетворяют неравенствам $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ при всех $1 \leq i, j \leq n$ [3].

При условиях I и II введем замену [1,4]

$$x = \tilde{x} - N\tilde{z}, \quad (10)$$

$$z = \tilde{z} + Hx. \quad (11)$$

Соотношения (10), (11) записываем в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & -N \\ H & E_n - HN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n - NH & N \\ -H & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}. \quad (13)$$

С учетом соотношений (12) уравнение (6) имеет вид

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} E_n & -N \\ H & E_n - HN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}((k+1)T) \\ \tilde{z}((k+1)T) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & \Phi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & -N \\ H & E_n - HN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}(kT) \\ \tilde{z}(kT) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} v(kT) \end{aligned} \quad (14)$$

Матричное уравнение (14) умножая слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} E_n & -N \\ H & E_n - HN \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E_n - NH & N \\ -H & E_n \end{pmatrix}$$

получим

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \tilde{x}((k+1)T) \\ \tilde{z}((k+1)T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 + \Phi_2 H + N(-H\Phi_1 + \Phi_3 - H\Phi_2 H - \Phi_4 H) \\ -H\Phi_1 + \Phi_3 - H\Phi_2 H + \Phi_4 H \\ -(\Phi_1 + \Phi_2 H)N + N(\Phi_4 - H\Phi_2) + \Phi_2 + N(-H\Phi_1 + \Phi_3 - H\Phi_2 H + \Phi_4 H) \\ \Phi_4 - H\Phi_2 - (-H\Phi_1 + \Phi_3 - H\Phi_2 H + \Phi_4 H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}(kT) \\ \tilde{z}(kT) \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} E_n - NH & N \\ -H & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} v(kT). \end{aligned} \quad (15)$$

При выполнении условий I и II матрицы H и N удовлетворяют следующим матричным алгебраическим уравнениям Риккати и Ляпунова соответственно:

$$-H\Phi_1 + \Phi_4 H - H\Phi_2 H + \Phi_3 = 0, \quad (16)$$

$$-\tilde{\Phi}_1 N + N\tilde{\Phi}_4 + A_2 = 0, \quad (17)$$

где $\tilde{\Phi}_1 = \Phi_1 + \Phi_2 H$, $\tilde{\Phi}_4 = \Phi_4 - H\Phi_2$.

Так как матрицы $\Phi_4, -\Phi_1'$ – устойчивы, уравнения (16), (17) имеют решения.

Покажем существование решения алгебраического уравнения Риккати (16). Пусть H_0 – положительно определенное решение линейного алгебраического уравнения

$$\Phi_4 H - H \Phi_1 + \Phi_3 = 0. \quad (18)$$

Так как матрицы $\Phi_4, -\Phi_1'$ – устойчивы уравнение (18) имеет единственное решение и ее можно представить в виде сходящегося интеграла [3, стр.146]

$$H_0 = \int_0^\infty e^{\Phi_4 s} \Phi_3 e^{-\Phi_1' s} ds, \quad (19)$$

Теперь приведем доказательство следующей леммы.

ЛЕММА. Пусть выполняется условие

III. Матрицы $\Phi_4 - H_0 \Phi_2$ и $\Phi_1 + \Phi_2 H_0$ устойчивы.

Тогда решение уравнение

$$(\Phi_4 - H_0 \Phi_2)(H_1 - H_2) - (H_1 - H_2)(\Phi_1 + \Phi_2 H_0) + V = 0, \quad (20)$$

где $Q = H_0 \Phi_2 H_0 + H_1 \Phi_2 H_2 + H_2 \Phi_2 H_1 - H_1 \Phi_2 H_1 - H_0 \Phi_2 H_2 - H_2 \Phi_2 H_0$,

можно представить в виде

$$H_1 - H_2 = \int_0^\infty e^{(\Phi_4 - H_0 \Phi_2)s} Q e^{-(\Phi_1 + \Phi_2 H_0)s} ds. \quad (21)$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$(\Phi_4 - H_0 \Phi_2)H - H(\Phi_1 + \Phi_2 H_0) + H_0 \Phi_2 H_0 + \Phi_3 = 0. \quad (22)$$

Пусть H_1 – положительно определенное решение уравнение (22), тогда имеем

$$(\Phi_4 - H_0 \Phi_2)H_1 - H_1(\Phi_1 + \Phi_2 H_0) + H_0 \Phi_2 H_0 + \Phi_3 = 0$$

или

$$\begin{aligned} &(\Phi_4 - H_0 \Phi_2)(H_1 - H_2) - (H_1 - H_2)(\Phi_1 + \Phi_2 H_0) + \\ &+ (\Phi_4 - H_0 \Phi_2)H_2 - H_2(\Phi_1 + \Phi_2 H_0) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Найдем матрицу H_2 как решение уравнение

$$(\Phi_4 - H_1 \Phi_2)H - H(\Phi_1 + \Phi_2 H_1) + H_1 \Phi_2 H_1 + \Phi_3 = 0. \quad (24)$$

т.е. получаем

$$(\Phi_4 - H_1 \Phi_2)H_2 - H_2(\Phi_1 + \Phi_2 H_1) + H_1 \Phi_2 H_1 + \Phi_3 = 0. \quad (25)$$

Из уравнения (25) имеем

$$\Phi_4 H_2 - H_2 \Phi_1 + \Phi_3 = H_1 \Phi_2 H_2 + H_2 \Phi_2 H_1 - H_1 \Phi_2 H_1.$$

Подставляя это равенство в (23), получим уравнение (20). Тогда интеграл (21) является единственным решением уравнения (20) ч.т.д.

Легко можно показать, что матрица Q в интеграле (21) неотрицательно определена, тогда подынтегральное выражение неотрицательно т.е.

$$H_1 - H_2 \geq 0.$$

Повторяя эти процедуры для $k = 1, 2, \dots$ получим неубывающую последовательность положительно определенных матриц:

$$H_1 \geq H_2 \geq \dots \geq H_k \geq \dots.$$

Матричная последовательность $\{H_k\}$ имеет предел [3]

$$H_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} H_k.$$

Таким образом, все матрицы построенной последовательности $\{H_k\}$ при любом $k = 1, 2, \dots$ удовлетворяют линейному алгебраическому уравнению

$$(\Phi_4 - H_{k-1} \Phi_2)H_k - H_k(\Phi_1 + \Phi_2 H_{k-1}) + H_{k-1} \Phi_2 H_{k-1} + \Phi_3 = 0. \quad (26)$$

Тогда предельная матрица H_∞ удовлетворяет уравнению (16).

С учетом (16), (17) уравнение (15) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}((k+1)T) \\ \tilde{z}((k+1)T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\Phi}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}(kT) \\ \tilde{z}(kT) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix} v(kT), \quad (27)$$

где $\tilde{F}_1 = F_1 + N\tilde{F}_2$, $\tilde{F}_2 = -HF_1 + F_2$.

В результате имеем утверждения в виде следующей теоремы

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия I, II и матрицы H , N удовлетворяют уравнениям (16) и (17). Тогда систему (6) можно разделить на две подсистемы меньшего порядка вида:

$$\tilde{x}((k+1)T) = \tilde{\Phi}_1 \tilde{x}(kT) + \tilde{F}_1 v(kT), \quad (28)$$

$$\tilde{z}((k+1)T) = \tilde{\Phi}_4 \tilde{z}(kT) + \tilde{F}_2 v(kT), \quad (29)$$

причем эти уравнения связаны только по управлению $v(kT)$.

Граничные условия системы (28), (29) определяются из соотношений:

$$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0, \quad (30)$$

$$\tilde{x}(1) = \tilde{x}_M, \tilde{z}(1) = \tilde{z}_M, \quad (31)$$

где

$$\tilde{x}_0 = x_0 + N\tilde{z}_0, \quad \tilde{z}_0 = z_0 - Hx_0, \quad \tilde{x}_M = x_M + N\tilde{z}_M, \quad \tilde{z}_M = z_M - Hx_M.$$

Теперь сформулируем задачу (6) – (9) следующим образом: требуется найти минимум функционала (9) на траекториях системы (28) – (31).

Решения уравнения (28), (29) с начальными условиями (30) можно представить в виде:

$$\tilde{x}(kT) = \tilde{\Phi}_1^k \tilde{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\Phi}_1^{k-i-1} \tilde{F}_1 v(iT), \quad (32)$$

$$\tilde{z}(kT) = \tilde{\Phi}_4^k \tilde{z}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\Phi}_4^{k-i-1} \tilde{F}_2 v(iT). \quad (33)$$

Из условия (31) следует, что искомое управление должно удовлетворять соотношениям:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\Phi}_1^{M-i-1} \tilde{F}_1 v(iT) = \alpha_M^1, \quad (34)$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\Phi}_4^{M-i-1} \tilde{F}_2 v(iT) = \alpha_M^2,$$

где $\alpha_M^1 = \tilde{x}_M - \tilde{\Phi}_1^M \tilde{x}_0$, $\alpha_M^2 = \tilde{z}_M - \tilde{\Phi}_4^M \tilde{z}_0$.

Управление $v^* = v^*(kT)$ удовлетворяющее соотношениям (34) и доставляющее минимум функционалу (9), может быть представлено в виде [5]

$$v^*(kT) = \tilde{F}_1' (\tilde{\Phi}_1^{M-k-1})' \cdot C_1 + \tilde{F}_2' (\tilde{\Phi}_4^{M-k-1})' \cdot C_2, \quad k = \overline{0, M-1}. \quad (35)$$

Здесь коэффициенты C_1 и C_2 определяются из уравнения

$$\alpha_M = W \cdot C, \quad (36)$$

где

$$\alpha_M = \begin{pmatrix} \alpha_M^1 \\ \alpha_M^2 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

$$W_1 = \sum_{i=0}^{M-1} \tilde{\Phi}_1^{M-i-1} \tilde{F}_1 \tilde{F}_1' (\tilde{\Phi}_1^{M-i-1})', W_2 = \sum_{i=0}^{M-1} \tilde{\Phi}_1^{M-i-1} \tilde{F}_1 \tilde{F}_2' (\tilde{\Phi}_4^{M-i-1})',$$

$$W_3 = \sum_{i=0}^{M-1} \tilde{\Phi}_4^{M-i-1} \tilde{F}_2' \tilde{F}_2 (\tilde{\Phi}_4^{M-i-1})'.$$

Из уравнения (36) будем иметь

$$C = W^{-1} \alpha_M, \quad (37)$$

где

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} W_1^{-1} + W_1^{-1} W_2 S^{-1} W_2' W_1^{-1} & -W_1^{-1} W_2 S^{-1} \\ -S^{-1} W_2' W_1^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}, S = W_3 - W_2' W_1^{-1} W_2.$$

В результате сформулируем следующую теорему

ТЕОРЕМА 2. Если матрица W в (37) имеет полный ранг, то существует управление $v^* = v^*(kT)$, которое переводит систему (28), (29) из состояния (30) в состояния (31) [3]. Кроме того, если $|W_1| \neq 0$ (или $|W_3| \neq 0$), то оптимальное цифровое управление и соответствующие ей оптимальные траектории задачи (9), (28) - (31) определяются формулами:

$$v^*(kT) = \tilde{F}_1' (\tilde{\Phi}_1^{M-k-1})' r_M^1 + \tilde{F}_2' (\tilde{\Phi}_4^{M-k-1})' r_M^2,$$

$$(38) \quad \tilde{x}(kT) = \tilde{\Phi}_1^k \tilde{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\Phi}_1^{k-i-1} \tilde{F}_1 \left[\tilde{F}_1' (\tilde{\Phi}_1^{M-i-1})' r_M^1 + \tilde{F}_2' (\tilde{\Phi}_4^{M-i-1})' r_M^2 \right], \quad (39)$$

$$\tilde{z}(kT) = \tilde{\Phi}_4^k \tilde{z}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\Phi}_4^{k-i-1} \tilde{F}_2 \left[\tilde{F}_1' (\tilde{\Phi}_1^{M-i-1})' r_M^1 + \tilde{F}_2' (\tilde{\Phi}_4^{M-i-1})' r_M^2 \right], \quad (40)$$

где

$$r_M^1 = (W_1^{-1} + W_1^{-1} W_2 S^{-1} W_2' W_1^{-1}) \alpha_M^1 - W_1^{-1} W_2 S^{-1} \alpha_M^2, \quad (41)$$

$$r_M^2 = -S^{-1} W_2' W_1^{-1} \alpha_M^1 + S^{-1} \alpha_M^2.$$

Таким образом, алгоритм построения цифрового управления с минимальной энергией состоит в следующем:

1. Для системы (6) проверяется условия I и II.
2. С помощью замены (10), (11) производится разделение переменных состояния системы (6).
3. При разделении переменных состояния системы (6), решая уравнения (16) и (17) находим матрицы H и N , следовательно через них получаем системы (28) – (31).

4. Вычисляем матрицы W в (36), r_M^1 и r_M^2 в (41).

5. Находим: $v^*(kT), \hat{x}(kT), \hat{z}(kT)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрыгин В. В., Соболев В. А. Разделение движений методом интегральных многообразий. – Москва: Наука. 1988. - 256 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – Москва: Наука, 1968. – 476 с.
3. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. – Москва: Наука, 1976. – 424 с.
4. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Разделение движений сингулярно возмущенной управляемой системы //Исследования по интегро-дифф. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007.- Вып.36. - С.136 -141.
5. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы., Алымбаева Ж.А. Решение дискретной задачи оптимального управления с малым шагом //Междунар. научно-информац. журн. «Наука и инновации». Вып. №1, Бишкек, 2013. С. 35 – 41.
6. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – Москва: Наука, 1968. – 476 с.
7. Стрыгин В. В., Соболев В. А. Разделение движений методом интегральных многообразий. – Москва: Наука. 1988. - 256 с.