

УДК 519.62

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА НЬЮТОНА – КАНТОРОВИЧА

Осмонканов А.М., Тургуналиев Э.Т., Карыбалиева К.Т.

КГУСТА им. Н. Исанова

Метод Ньютона является в настоящее время одним из наиболее употребительных методов. Главное его достоинство - это очень быстрая сходимость последовательных приближений к решению. Ньютоном был предложен эффективный метод вычисления решений уравнения $f(x) = 0$ (1)

для случая функции $f(x)$ с вещественными значениями, зависящей от вещественной переменной x .

Впоследствии метод Ньютона был перенесен на систему уравнений, когда $f(x) \in R^n, x \in R^n$, а затем обобщен Л.В. Канторовичем на уравнения в банаховых пространствах.

Пусть $f(x)$ - не линейный оператор, определенный в окрестности $O(x^*)$ решения x^* уравнения (1), непрерывно дифференцируемый в $O(x^*)$ в смысле Фреше т.е. существует линейный ограниченный оператор $A(A \in L(X, Y))$ такой, что для любых $x \in O(x^*)$

$$f(x) - f(x^*) = A(x - x^*) + w(x - x^*),$$

причем $\|w(x - x^*)\| = o(\|x - x^*\|)$ при $x \rightarrow x_0$. (2)

Оператор A формуле (2) называется производной Фреше оператора $f: X \rightarrow Y$ в точке x^* и обозначается $f'(x^*)$. Пусть, далее, в $O(x^*)$ оператор $f'(x)$ непрерывно обратим. Тогда итерационный

прогресс Ньютона- Канторовича состоит в следующем. Выбирается начальное приближение $x_0 \in O'(x^*)$ лежащее достаточно близко к решению x^* . Дальнейшие приближения x_n , $n=1,2,3,\dots$, предлагается вычислить по формуле

$$x_n = x_{n-1} - (f'(x_{n-1}))^{-1} f(x_{n-1}), n = 1,2,3,\dots, \quad (3)$$

На практике очень часто используют видоизмененное, или, как говорят, модификацию, итерационного метода Ньютона:

$$x_n = x_{n-1} - (f'(x_0))^{-1} f(x_{n-1}), n = 1,2,3,\dots, \quad (4)$$

Преимущество формул (4) заключается в том, что упрощаются вычисления (обратный оператор вычисляется только один раз). Недостаток формул (4), состоит в том, что ухудшается по сравнению с методом (3) скорость сходимости. Указанные методы рассмотрим применительно к интегральному уравнению. Пусть дано интегральное

$$\text{уравнение } x(t) = \int_0^1 K(t,s,x(s))ds, \quad t, s \in [0,1] \quad (5)$$

Где $K(t,s,u)$ - непрерывная функция всех своих аргументов, имеющая непрерывные производные нужных порядков. В функциональном пространстве X введем оператор P :

$$y = P(x), \quad y(t) = x(t) - \int_0^1 K(t,s,x(s))ds \quad (6)$$

и запишем уравнение (5) в виде функционального уравнения $P(x)=0$. Процесс Ньютона для этого уравнения строится следующим образом: пусть x_0 - начальное приближение; предположим, что пространство X и функция $K(t,s,u)$ таковы, что $P'(x_0)$ может быть получено «дифференцированием под знаком интеграла», т.е. что $Z = P'(x_0)(x)$

$$\text{означает } z(t) = x(t) - \int_0^1 K'_x(t,s,x_0(s))x(s)ds' \quad (7)$$

Поправка $\varphi_0(t) = x_1(t) - x_0(t)$ определяется из уравнения

$$P'(x_0)\varphi_0(t) = -P(x_0),$$

которое в силу (7) будет иметь вид

$$\varphi_0(t) - \int_0^1 K'_x(t, s, x_0(s))\varphi_0(s)ds = \varepsilon_0(t), \quad (8)$$

где $\varepsilon_0(t) = -P(x_0) = \int_0^1 K(t, s, x_0(s))ds - x_0(t)$ - есть невязка уравнения (6),

отвечающая начальному приближению. Таким образом итерационной процесс состоит в следующем:

$$x_k(t) = x_{k-1}(t) + \varphi_{k-1}(t), \quad k=1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$\varphi_{k-1}(t) = \varepsilon_{k-1}(t) + \int_0^1 K'_x(t, s, x_{k-1}(s))\varphi_{k-1}(s)ds, \quad (10)$$

$$\varepsilon_{k-1}(t) = \int_0^1 K(t, s, x_{k-1}(s))ds - x_{k-1}(t) \quad (11)$$

Процесс (9) достаточно сложен, поскольку на каждой итерации необходимо получать новое ядро $K'_x(t, s, x_{k-1})$ для уравнения (10).

Упрощение процесса достигается путем использования уравнения

$$\varphi_{k-1}(t) = \varepsilon_{k-1}(t) + \int_0^1 K'_x(t, s, x_0(s))\varphi_{k-1}(s)ds, \quad (12)$$

В том случае процесс сходится медленнее, однако менее сложен при вычислениях и потому часто оказывается более предпочтительным.

Данный метод относительно неоднородного нелинейного

интегрального уравнения $x(t) = \int_0^1 K(t, s, x(s))ds + g(t)$

строится следующим образом:

$$\varepsilon_{k-1}(t) = \int_0^1 K(t, s, x_{k-1}(s))ds + g(t) - x_{k-1}(t), \quad (13)$$

$$\varphi_k(t) = \varepsilon_k(t) + \int_0^1 K'_x(t, s, x_k(s))\varphi_k(s)ds, \quad (14)$$

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \varphi_k(t), \quad k=1, 2, \dots, \quad (15)$$

Рассмотрим пример:

$$x(t) = \int_0^1 t(s+1)x^2(s)ds + \frac{5}{4}t - 1$$

В качестве начального приближения принимаем $x_0(t) = 1$. Определяем согласно (13):

$$\varepsilon_0(t) = \int_0^1 (s+1)x_0^2(s)ds + \frac{5}{4}t - 1 - x_0(t) \quad \text{т.е.}$$

$$\varepsilon_0(t) = t \int_0^1 (s+1)ds + \frac{5}{4}t - 2 = \frac{11}{4}t - 2$$

Производная от ядра $K(t, s, x) = t(s+1)x^2$ равна $K'_x(t, s, x) = 2t(s+1)x$.

В соответствии с (14) составляем относительно $\varphi_0(t)$ уравнение

$$\varphi_0(t) = \frac{11}{4}t - 2 + 2t \int_0^1 (s+1)x_0(s)\varphi_0(s)ds ;$$

$$\varphi_0(t) = \frac{11}{4}t - 2 + 2t \int_0^1 (s+1)\varphi_0(s)ds = \frac{11}{4}t - 2 + 2t \int_0^1 s\varphi_0(s)ds + 2t \int_0^1 \varphi_0(s)ds$$

Обозначив $a = \int_0^1 s\varphi_0(s)ds$, $\varepsilon = \int_0^1 \varphi_0(s)ds$ получим $\varphi_0(t) = \frac{11}{4}t - 2 + 2t(a + \varepsilon)$ (16)

Интегрируя (16) от 0 до 1 получим $\varepsilon = \frac{11}{8} - 2 + (a + \varepsilon)$.

Умножив (16) на t , а затем интегрируя от 0 до 1 получаем

$a = \frac{11}{12} - 1 + \frac{2}{3}(a + \varepsilon)$. Получили два уравнения относительно неизвестных

a и ε .

Решение $a = \frac{5}{8}$, $\varepsilon = \frac{7}{16}$. Итак, $\varphi_0(t) = \frac{39}{8}t - 2$. Теперь определяется

первое приближенное искомой функции

$$x_1(t) = \varphi_0(t) + x_0(t) = \frac{39}{8}t - 1 = 4.875t - 1$$

Продолжая итерационной процесс получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(t) &= t \int_0^1 (s+1) \left(\frac{39}{8}s - 1 \right)^2 ds + \frac{5}{4}t - 1 - \left(\frac{39}{8}t - 1 \right) = t \int_0^1 (s+1) \left(\frac{39}{8}s - 1 \right)^2 ds - \frac{73}{8}t = \\ &= 7,239t - 9,125t = -1,886t\end{aligned}$$

Уравнение относительно $\varphi_1(t)$ имеет вид

$$\varphi_1(t) = -1,886t + 2t \int_0^1 (s+1)x_1(s)\varphi_1(s)ds = -1,886t + 2t \int_0^1 (4,875s^2 + 3,875s - 1)\varphi_1(s)ds$$

Обозначив $a = \int_0^1 s^2 \varphi_1(s)ds$, $b = \int_0^1 s \varphi_1(s)ds$, $c = \int_0^1 \varphi_1(s)ds$ имеем

$$\varphi_1(t) = -1,886t + 2t(4,875a + 3,875b - c) \quad (17)$$

Равенство (17) последовательно умножив на 1, t , t^2 а затем интегрируя получим систему линейных уравнений относительно a , b и c :

$$\begin{cases} c = -\frac{1,886}{2} + (4,875a + 3,875b - c) \\ b = -\frac{1,886}{3} + \frac{2}{3}(4,875a + 3,875b - c) \\ a = -\frac{1,886}{4} + \frac{1}{2}(4,875a + 3,875b - c) \end{cases}$$

Получим решение $a=0,156$, $b=0,208$, $c=0,312$

Видно, что $a = \frac{c}{2} =$, $b = \frac{2}{3}c$, $a = \frac{3}{4}b$ (18). Оттуда из (17) получим

$$\varphi_1(t) = -1,886t + 2t(0,761 + 0,886 - 0,312) = -1,886t + 2,51t = 0,624t$$

Теперь можно определить второе приближение

$$x_2(t) = x_1(t) + \varphi_1(t) = 4,875t - 1 + 0,624t = 5,498t - 1. \quad \text{Возьмем } x_2(t) = 5,5t - 1$$

$$\text{Далее, } \varepsilon_2(t) = t \int_0^1 (s+1)(5,5s - 1)^2 ds + 1,25t - 1 - (4,9t - 1) = t \int_0^1 (s+1)(5,5s - 1)^2 ds - 3,65t =$$

$$= t \int_0^1 (30,25s^2 - 11s + 1)(s+1)ds - 3,65t = t \int_0^1 (30,25s^3 - 11s^2 + s + 30,25s^2 - 11s + 1)ds - 3,65t =$$

$$= t \int_0^1 (30,25s^3 + 19,25s^2 - 10s + 1)ds - 3,65t = t(7,56 + 6,42 - 5 + 1) - 3,65t = 9,98t - 3,65t = 5,33t$$

$$\varphi_2(t) = 5,33t + 2t \int_0^1 (s+1)(5,5s - 1)\varphi_2(s)ds = 5,33t + 2t \int_0^1 (5,5s^2 + 4,5s - 1)\varphi_2(s)ds.$$

Как и выше получим $\varphi_2(t) = 5,33t + 2t(5,5a + 4,5e - c)$.

$$\text{Оттуда} \begin{cases} c = -\frac{5,33}{2} + (5,5a + 4,5e - c) \\ e = -\frac{5,33}{3} + \frac{2}{3}(5,5a + 4,5e - c) \\ a = -\frac{5,33}{4} + \frac{1}{2}(5,5a + 4,5e - c) \end{cases}$$

Используя формулы (18) получим $a = -0,355$, $e = -0,473$, $c = -0,71$

Следовательно,

$$\varphi_2(t) = 5,33t + 2t(5,5 * (-0,355) + 4,5 * (-0,473) + 0,71) = 5,33t - 6,74t = -1,41t$$

Третье приближение $x_3(t) = x_2(t) + \varphi_2(t) = 5,09t - 1 \cong 5t - 1$

$$\varepsilon_3(t) = t \int_0^1 (s+1)(5s-1)^2 ds + 1,25t - (5t-1) = t \int_0^1 (s+1)(5s-1)^2 ds - 3,75t =$$

$$= t \int_0^1 (s+1)(25s^2 - 10s + 1) ds - 3,75t = t \int_0^1 (25s^3 - 10s^2 + s + 25s^2 - 10s + 1) ds - 3,75t =$$

$$= t \int_0^1 (25s^3 + 15s^2 - 9s + 1) ds - 3,75t = t(6,25 + 5 - 4,5 + 1) - 3,75t = 4t$$

$$\varphi_3(t) = 4t + 2t \int_0^1 (s+1)(5s-1)\varphi_2(s) ds = 4t + 2t \int_0^1 (5s^2 + 4s - 1)\varphi_3(s) ds$$

или $\varphi_3(t) = 4t + 2t(5a + 4e - c)$

$$\text{Оттуда} \begin{cases} c = 2 + (5a + 4,5e - c) \\ e = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3}(5a + 4e - c) \\ a = 1 + \frac{1}{2}(5a + 4e - c) \end{cases} \quad a = -0,32, \quad e = -0,42, \quad c = -0,64$$

$$\varphi_3(t) = 4t + 2t(-1,6 - 2,48 + 0,42) = 4t - 7,87t = -3,87t$$

Четвертое приближение $x_4(t) = x_3(t) + \varphi_3(t) = 5t - 1 - 3,87t = 1,13t - 1$

$$\varepsilon_4(t) = t \int_0^1 (s+1)(1,13s-1)^2 ds + (1,25t-1) - (1,13t-1) = t \int_0^1 (s+1)(1,13s-1)^2 ds + 0,12t = 0,49t$$

$$\varphi_4(t) = 0,49t + 2t \int_0^1 (s+1)(1,13s-1)\varphi_4(s) ds = 0,49t + 2t \int_0^1 (1,13s^2 + 0,13s - 1)\varphi_4(s) ds$$

т.е. $\varphi_4(t) = 0,49t + 2t(1,13a + 0,13\epsilon - c)$

$$\begin{cases} c = \frac{0,49}{2} + (1,13a + 0,13\epsilon - c) \\ \epsilon = -\frac{0,49}{3} + \frac{2}{3}(1,13a + 0,13\epsilon - c) \\ a = \frac{0,49}{4} + \frac{1}{2}(1,13a + 0,13\epsilon - c) \end{cases}$$

Решая систему, находим $a=0,09$, $\epsilon=0,12$, $c=0,18$.

Следовательно $\varphi_4(t) = 0,49t - 0,05t = 0,44t$, $x_5(t) = 1,13t - 1 + 0,44t = 1,57t - 1$

Из данного интегрального уравнения можно заметить, что решение данного интегрального уравнения имеет вид $x(t) = kt - 1$. Поставляя

$x(t) = kt - 1$ в уравнение $x(t) = t \int_0^1 (s+1)x^2(s)ds + 1,25t - 1$ получаем

$$k = \int_0^1 (s+1)(ks-1)^2 ds + 1,25 \text{ или } 7k^2 - 32k + 33 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня $k_1 = 3$ и $k_2 = \frac{11}{7} = 1,57$.

Т.е. интегральное уравнение имеет два решения $x_1(t) = 3t - 1$,

$$x_2(t) = 1,57t - 1$$

Таким образом, мы нашли второе решение $x_2(t)$ за пять итераций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ М.: Наука, 1977 742с.
2. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496с.
3. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. Справочные пособие. Киев: Наукова думка, 1978. 291с.