

УДК 533.9

**РАСЧЕТ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ КОРОННОГО РАЗРЯДА В  
ВОЗДУХЕ В РАМКАХ УНИПОЛЯРНОЙ МОДЕЛИ И  
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Чечейбаев А.Б.

Университет Центральной Азии, г. Бишкек

В настоящее время метод крупных частиц (МКЧ), разработанный крупным российским ученым Ю.М.Давыдовым, является одним из лучших представителей методов современного вычислительного эксперимента и позволяет численно решать сложные задачи науки и технологий [1, 2]. Наряду с такими широко известными в мире вычислительными методами, как метод конечных объемов и метод конечных элементов, метод крупных частиц успешно используется при решении сложных задач газовой динамики, магнитной гидродинамики, физики плазмы, нефтегазового дела, экологии, машиностроения и др. [3 и др.]

Современные технологии электрической очистки газа в мире предъявляют требования по разработке и усовершенствованию физических, математических и вычислительных моделей процессов очистки газа в электрических фильтрах [5 и др.]. В данных работах рассматриваются оба вида электрических видов - пластинчатый и цилиндрический.

Принципиально цилиндрические электрические фильтры состоят из двух электродов, сконструированных в виде двух концентрических

цилиндров, внутренний из которых служит электродом короны, а внешний – осаждающим электродом.

Основная идея очистки газов от дисперсных его составляющих (мелкие частицы пыли и аэрозолей) заключается в следующем. На поверхность электрода короны подается высоко напряжение (обычно в пределах 20-70 кВ), достаточное для создания электрического пробоя в газах, наступающего при электрическом поле около 31,2 кВ/см. В результате, в воздухе появляются свободные ионы и электроны, которые заряжают мелкие частицы пыли или аэрозоля. Заряженные дисперсные частицы, затем, двигаясь в сторону осаждающего электрода, собираются на коллекторе у его поверхности. Коэффициент очистки газов современных электрических фильтров в мире находится в пределах 99%.

При расчете газодинамики, динамики электрических зарядов и зарядки аэрозольных частиц в электрических фильтрах в настоящее время чаще всего используют так называемую униполярную модель зарядки, когда пренебрегают тонким слоем плазмы (рис.1), возникающим при электрическом пробое в газах [5 и др.]



Рис 1. Схематическое изображение электрического пробоя в цилиндрическом электрическом фильтре.

Униполярная математическая модель динамики короны в цилиндрической геометрии состоит из уравнения неразрывности для электрического заряда и уравнения Пуассона и соотношения для электрического поля:

$$r \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot Z_i \cdot E) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = - \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (2)$$

$$E = - \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (3)$$

где  $r$  – радиальная переменная,  $t$  – время,  $\rho$  – плотность электрического поля,  $Z_i$  – коэффициент подвижности заряда,  $E$  – электрическое поле,  $\varphi$  – электрический потенциал,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная.

В начальный момент времени предполагается, что в электрическом фильтре отсутствуют электрические заряды. На коронирующем электроде  $r = r_a$  ставятся граничные условия:  $\rho = \rho_a = const$ ,  $\varphi = \varphi_a = const$ , или вместо последнего - условие  $E = E_a = const$ . На осаждающем электроде  $r = r_b$  ставятся условия  $\varphi = 0$  и  $\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0$ .

Для решения системы (1) – (3) используется метод крупных частиц совместно с алгоритмом Томаса [7]. Здесь алгоритм Томаса используется для решения системы линейных алгебраических уравнений трехдиагонального вида, возникающего при решении уравнения Пуассона. Автором данной статьи был разработан вычислительный алгоритм, составлена программа на М-языке системы MATLAB и проведены вычислительные эксперименты, некоторые результаты которых приводятся ниже.

Исходная система (1) – (3) была обезразмерена путем введения характерных параметров задачи:  $l_0 = 10^{-2}$  м – характерная длина,

$\varphi_0 = 10^4$  В – характерный электрический потенциал,  $E_0 = 10^6$  В/м – характерное электрическое поле,  $\rho_0 = 10^{-4} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$  – характерный электрический заряд,  $Z_0 = 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$  – характерная подвижность электрического заряда,  $t_0 = 10^{-5}$  с – характерное время,  $(\varepsilon_0)_0 = 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$ . Тогда размерная и безразмерная части физических параметров задачи будут соотноситься друг с другом таким образом:  $r = \tilde{r} \cdot l_0$ ,  $t = \tilde{t} \cdot t_0$ ,  $E = \tilde{E} \cdot E_0$ ,  $\varphi = \tilde{\varphi} \cdot \varphi_0$ ,  $Z = \tilde{Z} \cdot Z_0$ ,  $\rho = \tilde{\rho} \cdot \rho_0$ .

На всех графиках (рис 2 – рис. 11), представленных в данной статье, принимались следующие исходные данные задачи. Радиус коронирующего электрода был принят равным  $r_a = 1$  мм, радиус осаждающего электрода равен  $r_b = 10$  см, коэффициент подвижности электрического заряда равен подвижности положительного иона воздуха:  $Z_i = 1,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$ . На поверхности коронирующего электрода  $r = r_a$  инжектируемый в межцилиндрическое пространство объемный электрический заряд был принят равным  $\rho_a = 10^{-4} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$ . Длина трубчатых электродов равна 83 см.

Ниже приводятся результаты проведенных расчетов с помощью метода крупных частиц – распределения униполярного электрического заряда, униполярного электрического тока, электрического поля и электрического потенциала при трех различных моментах безразмерного времени, а также проводится сравнение с аналитическим решением, полученным для установившегося потока в докторской диссертации Кристиана Любберта [5] и монографии Ю.П. Райзера [6].

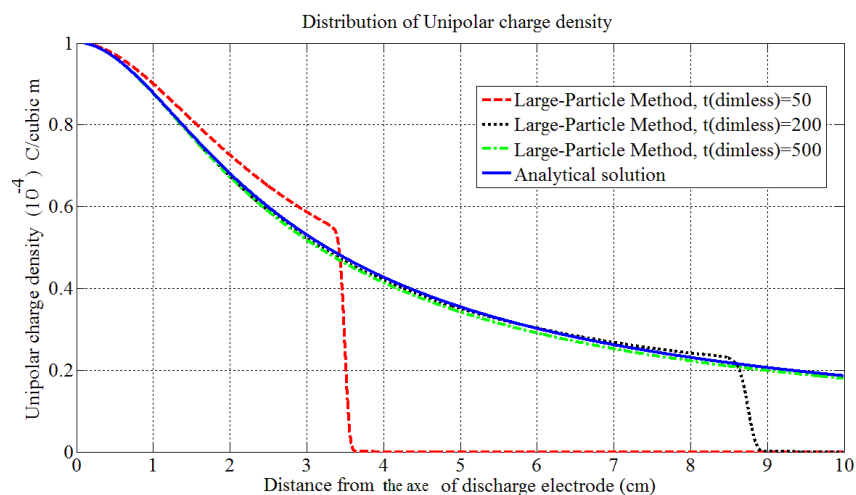


Рис 2. Распределения униполярного объемного электрического заряда (МКЧ) и аналитическое решение задачи.

На рис. 2 - рис. 8 по горизонтальной оси отложено расстояние от оси электрода короны до заданной точки.

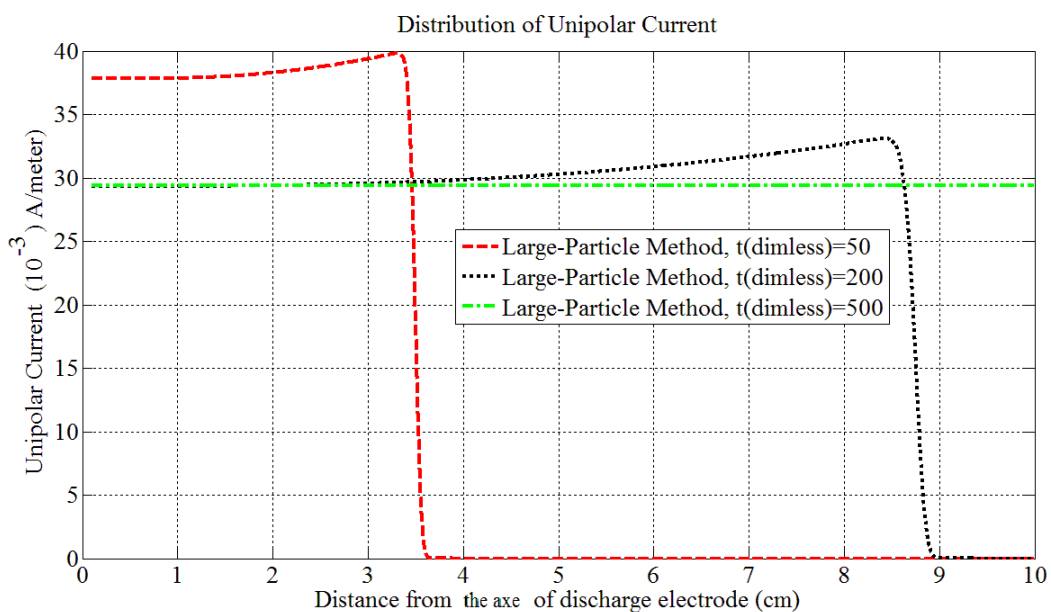


Рис 3. Распределения электрического тока (МКЧ) при трех различных безразмерных моментах времени.

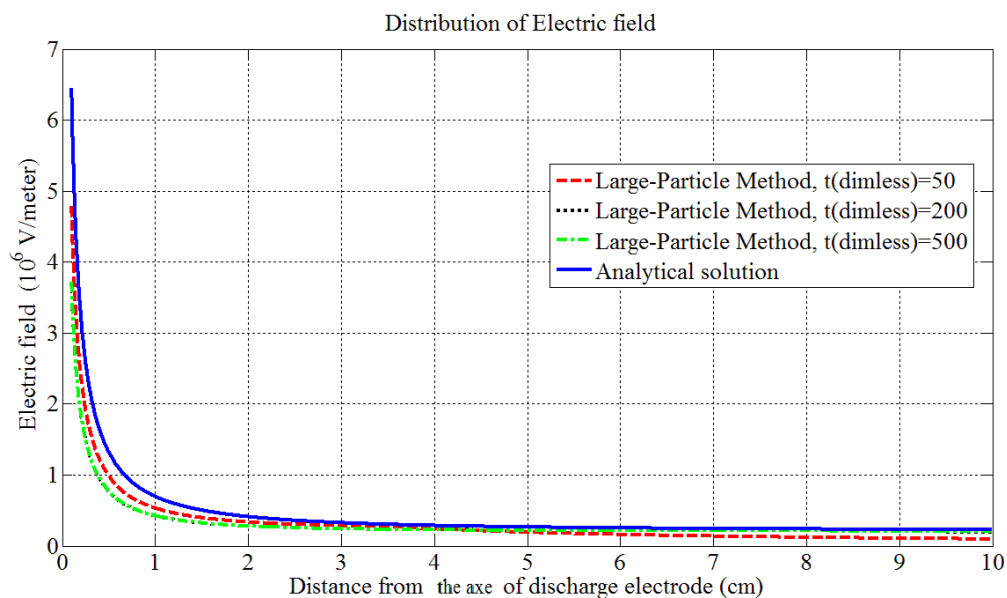


Рис 4. Распределения электрического поля (МКЧ) и аналитическое решение задачи из [5].

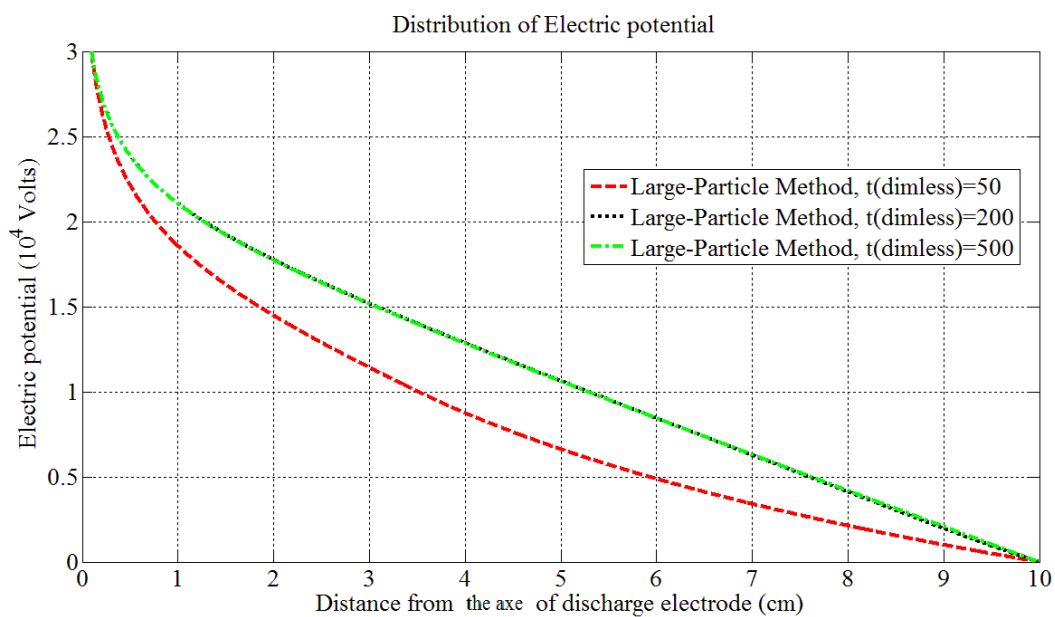


Рис 5. Распределения электрического потенциала (МКЧ) при трех различных безразмерных моментах времени.

Из рис. 2 и рис. 3 видно, что при безразмерном  $\tilde{t} = 500$  или при абсолютном времени  $t = \tilde{t} \cdot t_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  с, достигается процесс

установления: величина электрического тока постоянна всюду в области интегрирования  $[r_a; r_b]$ .

В настоящее время одной из бурно развивающихся направлений науки является пылевая плазма, имеющая практические приложения в космологии, цементной промышленности, покраске автомобилей, очистке газов и др. Основную роль в описании процесса зарядки дисперсных частиц в электрическом поле играет здесь теория зарядки пылевых частиц. Основоположными работами в теории зарядки пылевых частиц являются работы M. Pauthenier and M. Moreau-Hanot (1932), R.A. Fjeld and A.R. McFarland (1989), A. Lawless (1996) и др.

В модели зарядки M. Pauthenier and M. Moreau-Hanot основным допущением является то, что каждая пылевая частица мгновенно заряжается до границы полевой зарядки [5], т.е.

$$\rho_p = c \cdot \left( \frac{3 \cdot \varepsilon_p}{\varepsilon_p + 2} \right) \cdot \left( \frac{E \cdot (d_p)^2}{4 \cdot K_E} \right),$$

где  $\rho_p$  - объемная плотность заряда пылевых частиц,  $c$  - концентрация пылевых частиц,  $d_p$  - диаметр пылевых частиц,  $\varepsilon_p$  - безразмерный коэффициент относительной электрической проницаемости частиц,

$$K_E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}.$$

Ниже приводится математическая модель динамики электрических зарядов с учетом зарядки пылевых частиц в рамках теории зарядки M. Pauthenier and M. Moreau-Hanot:

$$r \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot Z_i \cdot E) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot (\rho + \rho_p), \quad (5)$$

Дополнительные характерные параметры задачи выбраны следующими:

$c_0 = 10^{15} \text{ м}^{-3}$  - характерная концентрация пылевых частиц,  
 $(d_p)_0 = 10^{-6,5} \text{ м}$  - характерный диаметр пылевых частиц. Введем здесь

коэффициент поверхностной концентрации пылевых частиц:

$$c_s = \frac{c \cdot (d_p)^2}{4 \cdot K_E \cdot \varepsilon_0}.$$

Далее были проведены численные расчеты методом крупных частиц для расчета системы (4) - (5) при условии, что  $c_s = 11 \text{ м}^{-1}$ .

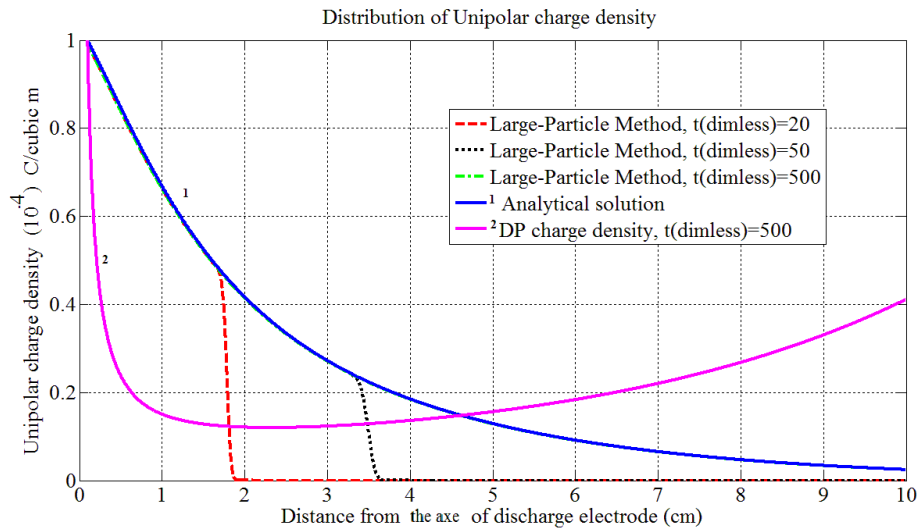


Рис 6. Распределения униполярного объемного электрического заряда (МКЧ), объемного заряда пылевых частиц при различных моментах времени и аналитическое решение задачи [5].

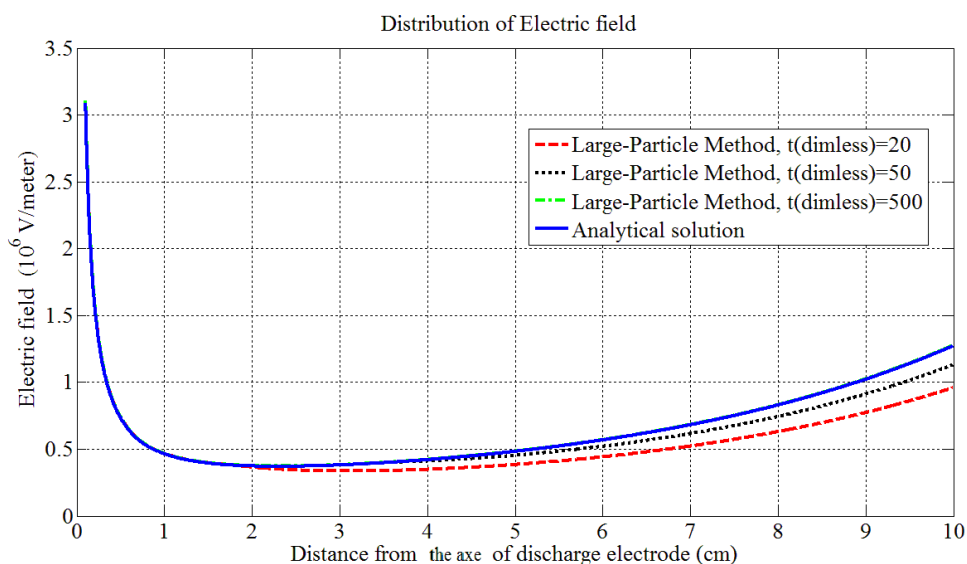


Рис 7. Распределения электрического поля (МКЧ) при различных трех моментах времени и соответствующее аналитическое решение задачи [5].

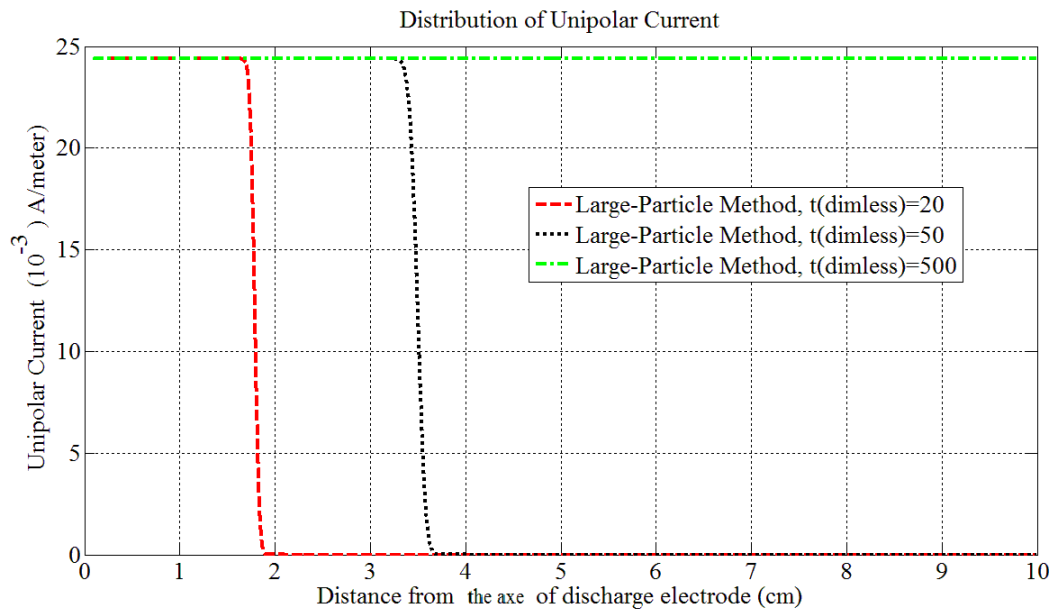


Рис 8. Распределения электрического тока (МКЧ) при различных трех моментах времени.

В качестве следующей рассмотрим задачу о расчете динамики электрического заряда в трубчатом электрическом фильтре при учете объемного заряда пылевых частиц в уравнении Пуассона. Предполагается, что объемный заряд пылевых частиц постоянен. Взаимообменом зарядов между воздухом и пылевыми частицами пренебрегаем. При таких допущениях математическая модель задачи представляет систему, состоящую из уравнения неразрывности для электрического заряда и уравнения Пуассона, записанного в терминах электрического поля и имеющего вид уравнения Риккати:

$$r \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \rho \cdot Z_i \cdot E) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \left( \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot Z_i \cdot E \cdot \varepsilon_0} + \rho_p \right), \quad (7)$$

где  $I = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \rho \cdot L \cdot Z_i \cdot E$  - величина электрического тока.

На коронирующем электроде ставится условие постоянства значений объемного заряда и электрического поля.

Данная задача решена аналитически и представлена в докторской диссертации Кристиана Любберта [5], выражаясь с помощью так называемых W-функций Ламберта:

$$\rho(r) = - \frac{\rho_p}{1 + LambertW_{-1} \left( \frac{\left( \frac{2\pi r_a LZ_i \rho_p}{I} \right) E_a + 1}{\exp \left\{ \left( \frac{2\pi r_a LZ_i \rho_p}{I} \right) \cdot \left( E_a + \frac{\rho_p (r^2 - r_a^2)}{2r_a \varepsilon_0} \right) + 1 \right\}} \right)},$$

$$E(r) = - \frac{I}{2\pi r_a LZ_i \rho_p} \left[ 1 + LambertW_{-1} \left( \frac{\left( \frac{2\pi r_a LZ_i \rho_p}{I} \right) E_a + 1}{\exp \left\{ \left( \frac{2\pi r_a LZ_i \rho_p}{I} \right) \cdot \left( E_a + \frac{\rho_p (r^2 - r_a^2)}{2r_a \varepsilon_0} \right) + 1 \right\}} \right) \right].$$

Для расчета системы (6) - (7) методом крупных частиц, уравнение (7) было переписано в виде

$$\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot (\rho + \rho_p) \quad (8)$$

В процессе расщепления системы (6), (8) методом крупных частиц, уравнение (8) численно решалось с помощью метода Рунге-Кутты, используя разностные схемы третьего порядка точности [7]. В данной задаче полагалось, что объемный заряд пылевых частиц равен  $\rho_p = 8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3} = \text{const.}$

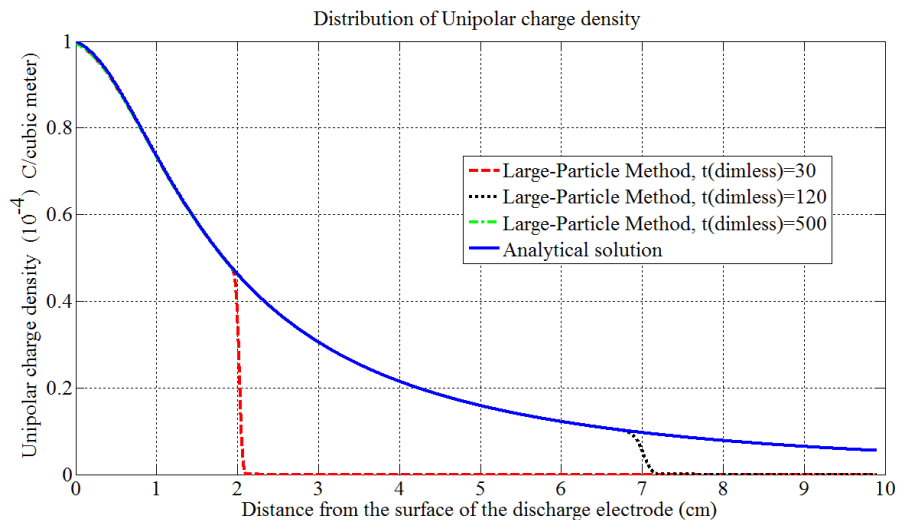


Рис 9. Распределения объемного заряда (МКЧ) при различных трех моментах времени и аналитическое решение.

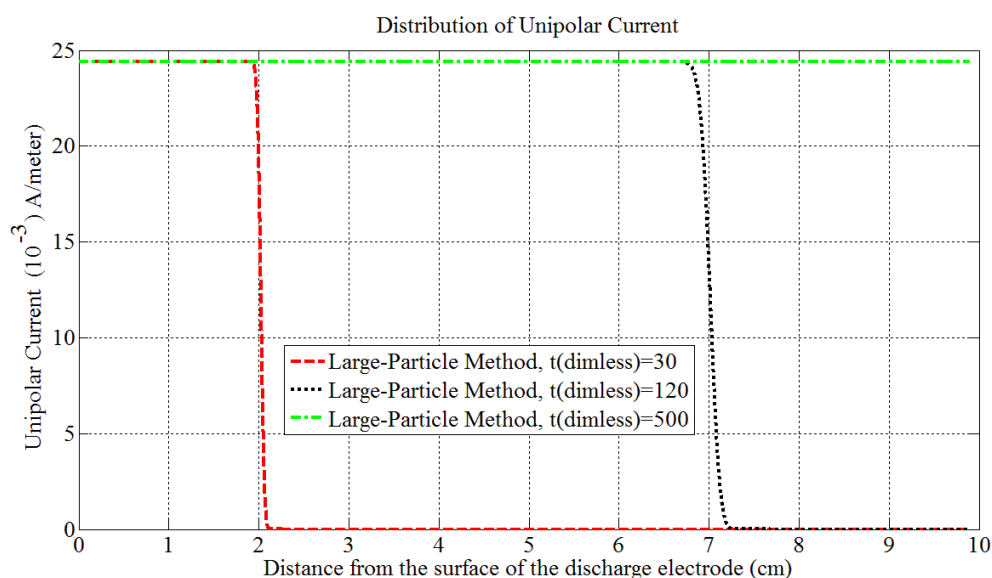


Рис 10. Распределения электрического тока (МКЧ) при различных трех моментах времени.

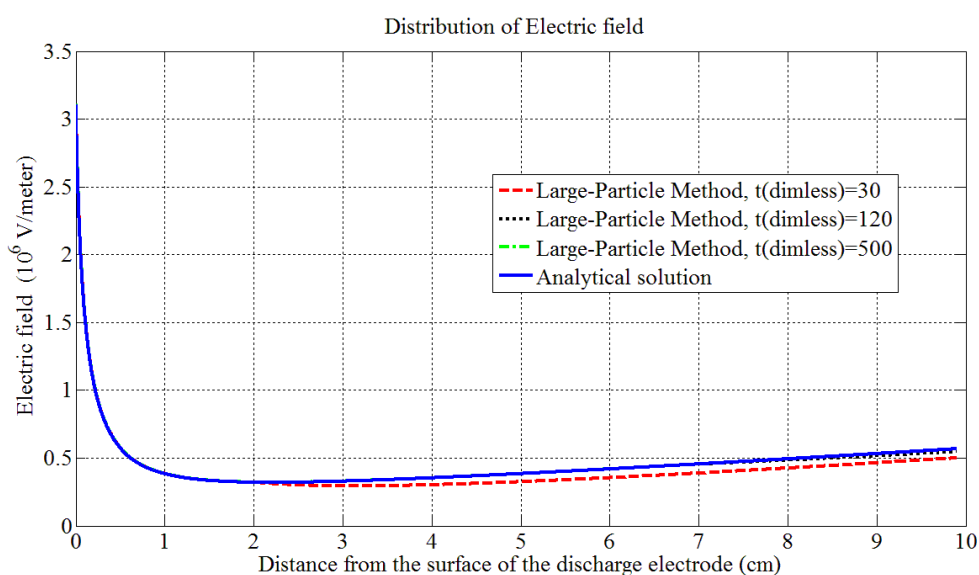


Рис 11. Распределения электрического поля (МКЧ) при различных трех моментах времени и аналитическое решение.

Из вышеприведенных графиков следует, что процесс установления динамики заряда во всех рассмотренных задачах наступает до момента времени 5 миллисекунд, в этот момент времени величина электрического тока постоянна в промежутке между электродами.

Проведенные численные расчеты методом крупных частиц показали высокую точность полученных численных решений при сравнении их с соответствующими аналитическими решениями для случаев установившихся потоков из работ Ch. Luebbert [5] и Yu. Raizer [6].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.М. Давыдов. Крупных частиц метод. В кн.: Математическая энциклопедия. Т. 3. – Москва: Советская энциклопедия, 1982. – С. 125-129.
2. Yuri M. Davydov. Large-Particle Method. In.: Encyclopaedia of Mathematics, vol.5. -Dordrecht/Boston/London: Kluwer academic publishers, 1990, p.p. 358-360.
3. Ю.М. Давыдов, Б. Чечейбаев, И.М. Давыдова, и др. Исследование актуальных проблем механики и машиностроения. // Под ред. Ю.М. Давыдова, в 5-ти томах. – М.: НАПН РФ, 1995. - 1658 с.
4. Christian Luebbert. Zur Charakterisierung des gequenchten Zustandes im Elektroabscheider. Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs. – Deutschland: Brandenburgische Technische Universitaet, 2011. – 168 S.
5. Yuri P. Raizer. Gas discharge physics. – Berlin: *Springer Verlag*, 1991.
6. Joe D. Hoffman. Numerical methods for engineers and scientists. 2<sup>nd</sup> edition. - New-York: Marcel Dekker Inc. – 384 p.
7. Давыдов Ю.М., Чечейбаев А.Б. Моделирование фильтрационных течений в пласте методом крупных частиц при различных моделях фильтрации // Математическое моделирование систем и процессов. Сб. научных трудов. - Пермь: Пермский гос. техн. ун-т, 2000. - С. 11-20.