

ИССЛЕДОВАНИЕ ВИХРЕЙ ГЕРТЛЕРА-ТЕЙЛОРА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ВБЛИЗИ ВОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Бийбосунов А.И., Жусупбекова С.Т.

КНУ им. Ж.Баласагына, КНАУ им. К.Скрябина

В статье формулируется краевая задача, описывающая нелинейную фазу развития возмущений в сжимаемом пограничном слое в поле центробежных сил при докритических числах Рейнольдса и Гертлера. Эта модель предназначена для описания развития вихрей Гертлера и для возмущенных течений около локальных и периодических в трансверсальном направлении неровностей или других пространственных возмущенных течений.

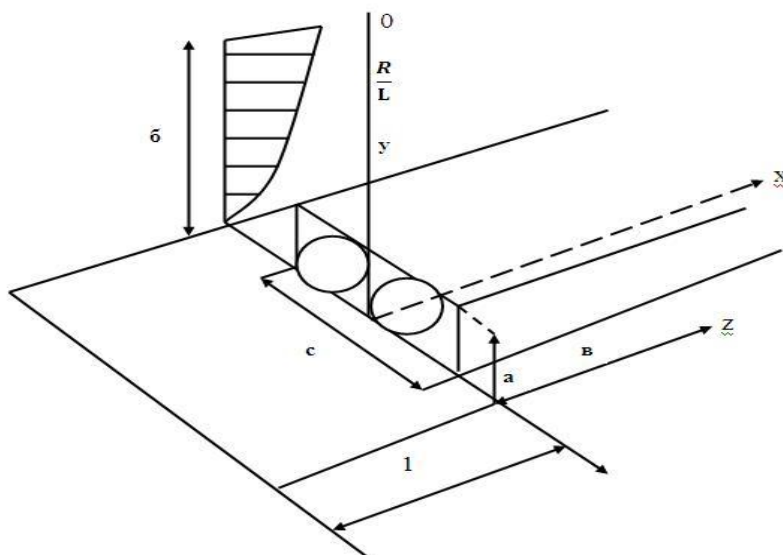


Рис1. Схема исследуемого течения

В криволинейной ортогональной системе координат уравнения Навье – Стокса могут быть записаны в безразмерной форме в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1-Ky} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{Ky}{1-Ky} = 0 \\
 & \frac{u}{1-Ky} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{Kuv}{1-Ky} + \frac{1}{1-Ky} \frac{\partial P}{\partial x} = \\
 & = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{(1-Ky)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{K}{1-Ky} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2K}{(1-Ky)^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{K^2 u}{(1-Ky)^2} \right] \\
 & \frac{u}{1-Ky} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{Ku^2}{1-Ky} + \frac{\partial P}{\partial y} = \\
 & = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{(1-Ky)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{K}{1-Ky} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2K}{(1-Ky)^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{K^2 v}{(1-Ky)^2} \right] \\
 & \frac{u}{1-Ky} \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} = \\
 & = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{(1-Ky)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{K}{1-Ky} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (1)
 \end{aligned}$$

Координаты X, Y, Z отнесены к L , компоненты скорости U, V, W (вдоль осей координат X, Y, Z соответственно) – к U_∞ , давление P – отнесено к ρU_∞^2 (где ρ - плотность жидкости).

В дальнейшем используются только безразмерные переменные (независимые и искомые).

Предполагается, что кривизна вогнутой поверхности:

$$K = L/R = \varepsilon K < 1, \quad K \sim O(1), \quad \varepsilon < \varepsilon < 1$$

т.е. рассматриваются такие течения, когда число Гертлера велико:

$$G_e = 2 Re^{1/2} L/R \sim O(\varepsilon/\varepsilon) > 1$$

Пусть «а», «b» и «с» - характерные толщина, протяженность и ширина пространственной возмущенной вихревой области течения. Очевидно, эти величины должны быть больше характерной длины

свободного пробега молекул жидкости $O(\varepsilon^2)$, иначе для исследования течения в областях с характерными размерами:

Рассмотрим режим, соответствующий длинам волны вихрей Гертлера λ , сравнимые с толщиной пограничного слоя δ . В этом случае характерные размеры возмущенной области течения совпадают по порядку величины, тогда одинаковые порядки будут иметь и возмущенные величины вертикальной и трансверсальной скоростей $v \sim w$, что следует из уравнения неразрывности и принципа минимального вырождения.

Предположим, что вихри вызывают нелинейные изменения основного течения, тогда $u \sim \Delta u \sim 0$

Нелинейность, проявляющаяся трансверсальном направлении дает

$$w \sim \Delta w \sim (\Delta p)^{\frac{1}{2}}$$

При этом исследуются нелинейные процессы, проявляющиеся в течении с характерным масштабом в направлении координаты z равным λ , что определяет величину градиента давления в поперечном направлении:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{\rho u^2}{\kappa}$$

Отсюда $\Delta p \sim \varepsilon \kappa$. Далее $v \sim w \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}}$

Из уравнения неразрывности и данных оценок можно найти продольный размер возмущенной области $x \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}}$

Для дальнейшего анализа важно оценить порядок отношения диффузионного и инерционного членов в уравнении продольного импульса:

$$\frac{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}} \sim 0(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}}) \rightarrow 0$$

Понятно, что в таких условиях не выполнено условие прилипания и поэтому необходимо ввести на дне основной области подслой с толщиной:

$$y \sim \varepsilon^{\frac{3}{4}} \kappa^{-\frac{1}{4}}$$

течение в котором будет описываться системой уравнений трехмерного пограничного слоя. Решение такой системы можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x &\approx 1 + \lambda \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \kappa^{-\frac{1}{2}} x_\alpha \\ y &\approx \lambda y_\alpha \\ z &\approx \lambda z_\alpha \\ u(x, y, z, \varepsilon) &\approx u_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) + \dots \\ v(x, y, z, \varepsilon) &\approx v_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \cdot \lambda^{-1} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}} + \dots \\ w(x, y, z, \varepsilon) &\approx w_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2}} \kappa^{\frac{1}{2}} + \dots \quad (2) \\ \rho(x, y, z, \varepsilon) &\approx \rho_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) + \dots \\ H(x, y, z, \varepsilon) &\approx H_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) + \dots \\ P(\gamma \mu_\infty^2)^{-1} + \varepsilon \kappa \rho_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) + \dots \end{aligned}$$

Подстановка этих разложений в систему уравнений Навье – Стокса и совершение предельного перехода при $Re \rightarrow \infty$, $Ge \rightarrow \infty$ приводят к модифицированной системе уравнений Эйлера для трехмерного возмущенного течения.

Отличие полученной системы уравнений от обычной системы уравнений Эйлера состоит в наличии члена в уравнении для поперечного импульса, учитывающего влияние центробежных сил.

Другая особенность связана с отсутствием градиента давления в уравнении продольного импульса. Аналогичным первым интегралом обладает и уравнение для полной энтальпии. Для возмущений малой амплитуды решение системы уравнений можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
u(x) &= u_0(y_\alpha) + \tau u_\alpha(y_\alpha) \sin z_\alpha \exp(i\alpha x_\alpha) + \dots \\
v_\alpha &= \tau v_\alpha(y_\alpha) \exp(i\alpha x_\alpha) \sin z_\alpha + \dots \\
w_\alpha &= \tau w_\alpha(y_\alpha) \exp(i\alpha x_\alpha) \cos z_\alpha + \dots \\
H_\alpha &= H_0(y_\alpha) + \tau G_\alpha(y_\alpha) \exp(i\alpha x_\alpha) \sin z_\alpha + \dots \\
\rho_\alpha &= \rho_0(y_\alpha) + \tau R_\alpha(y_\alpha) \exp(i\alpha x_\alpha) \sin z_\alpha + \dots \\
P_\alpha &= P_0(y_\alpha) + \tau P_\alpha(y_\alpha) \exp(i\alpha x_\alpha) \sin z_\alpha + \dots \\
\tau &\ll 1
\end{aligned} \tag{3}$$

Ограничиваясь нулевым и первым приближением из (2) и (3) можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned}
\alpha \rho_0 u_\alpha + \alpha u_\alpha R_\alpha + \rho_0 v'_\alpha + v_\alpha \rho'_0 - \rho_0 w_\alpha &= 0 \\
\alpha u_0 u_\alpha + v_\alpha u'_0 &= 0 \\
\beta [\alpha u_0 u_\alpha + 2u_0 u'_\alpha] + \frac{1}{\rho_0} P_\alpha u'_0 - \frac{R_\alpha}{\rho_0^2} \rho'_0 &= 0 \\
\frac{1}{\rho_0} P'_0 &= -u_0^2
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\alpha u_0 w_\alpha + \frac{R_\alpha}{\rho_0} = 0$$

$$\alpha u_0 G_\alpha + v_\alpha H'_0 = 0$$

$$H_0 = \frac{\gamma-1}{\rho_0 \mu_\infty^2} + \frac{u_0^2}{2}$$

$$G_\alpha = -\left(1/\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\mu_\infty^2\right) R_\alpha/\rho_0^2 + u_0 u_\alpha$$

$$\rho_0 = \mu_0^2(u_0^2 \mu_\infty^2) \rho_0 = \rho'_0 v_1(\alpha u_0)$$

где $(\quad)' = \frac{\partial}{\partial y}$.

Если ввести новую переменную $z = \frac{u_0}{u_\alpha}$, то тогда можно свести систему (4) к одному дифференциальному уравнению:

$$z'' + 2z' \left(\frac{\mu'_0}{\mu_0} \right) + z \left(-\beta + 2 \left(\frac{\mu'_0}{\mu_0 \alpha^2} \right) \right) = 0 \tag{5}$$

с граничными условиями:

$$v_1(0) = 0; \quad v_1(\infty) = 0 \quad (6)$$

$$z(\infty) = 0, \quad z(0) = \text{const.}$$

Это уравнение представляет собой задачу на собственные значения. Существует два пути решения уравнения (5) с граничными условиями (6): поиск собственных значений матрицы, получающейся при разностном представлении уравнения (5) второй путь, как результат решения дифференциального уравнения методом Рунте-Кутта.

На рис. 2 и 3, представлены профили скорости z для различных значений φ , μ_∞ , γ .

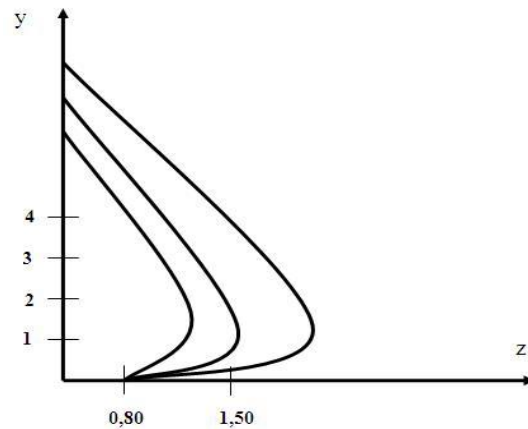


Рис.2. График распределения скорости z при

$$\mu = 0,2, \quad \varphi = 2,5, \quad \gamma = 1,8 \quad \alpha = 15, \quad \beta = 0,01$$

$$\mu = 0,2, \quad \varphi = 0,6, \quad \gamma = 1,8 \quad \alpha = 15, \quad \beta = 0,01$$

$$\mu = 0,2, \quad \varphi = 2,0, \quad \gamma = 1,8 \quad \alpha = 3,5, \quad \beta = 0,01$$

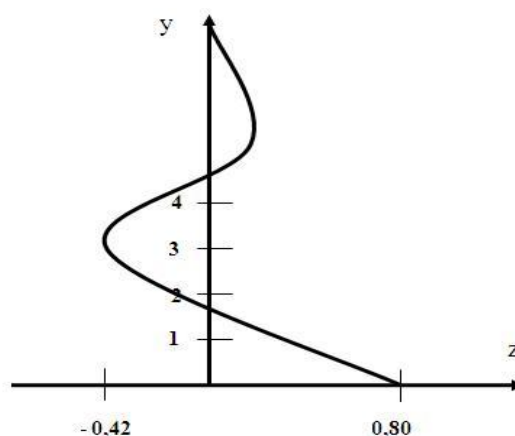


Рис.3. График распределения скорости z при
 $\mu = 1,4$, $\varphi = 1,4$, $\gamma = 1,8$ $\alpha = 15$, $\beta = 0,01$

При этом в нелинейном приближении также численно получены зависимость местного числа Рейнольдса от инкремента роста амплитуды вихрей для первых трех основных вихревых мод.

Таким образом, это позволяет исследовать проблемы перехода ламинарных течений к турбулентным потокам и развития вихрей Гертлера. Данные решения могут найти также теоретическое и практическое применение в таких областях, как авиастроение, в межлопаточных каналах и гидравлических процессах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / М., изд-во Ин. Лит-ра, 1960.
2. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике / М. Гостехиздат, 1957.
3. Бранловская И.Ю., Чудов Л.В. Решения уравнений пограничного слоя разностным методом. Сб. Выч. Методы и программирование / М. 1962.