

## ОБТЕКАНИЕ ПРОНИЦАЕМОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ ПОТОКОМ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ НАКЛОНЕННОЙ К ПЛАСТИНКЕ

Абдылдаев М.Ю., Исаков Б.О., Аркабаева Г.Н.

КНУ им. Ж.Баласагына

1. Рассматривается задача об обтекании плоской проницаемой бесконечной пластинки струей, вытекающей из канала наклоненной к пластинке под углом  $\alpha$  (рис.1).

Струя, ударяющаяся о бесконечную пластину, в плоскости  $W$  (комплексный потенциал) дает более сложную область; годографом течения является круговая луночка.

Будем считать, что пластина расположена горизонтально и что ширина канала равна  $L$ .

Перейдем к вычислению этих величин.

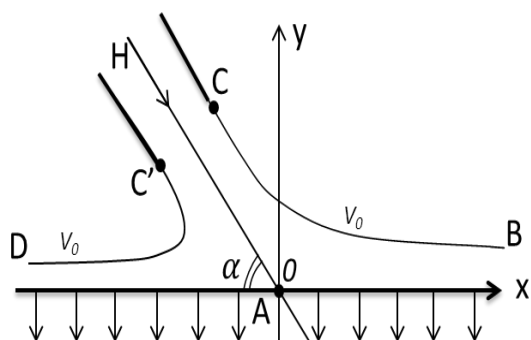


Рис.1 Картина течения в физической плоскости  $z = x + iy$ .

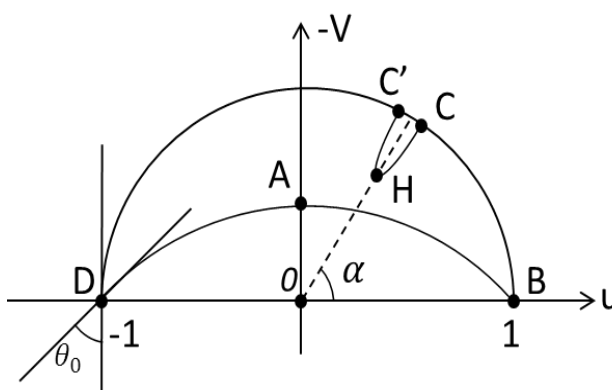


Рис.2 Область течения в плоскости годографа  $z = u - iv$ .

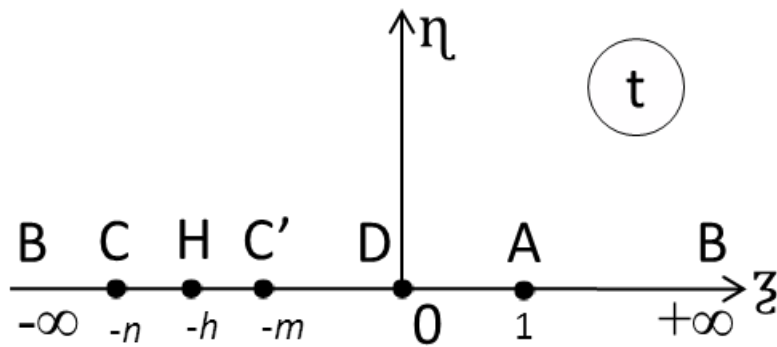


Рис.3 Параметрическая плоскость  $t = \xi + i\eta$ .

Как известно, что математическая теория плоских течений идеальной жидкости определяется с тремя комплексными величинами: координатной точки  $z = x + iy$ , комплексным потенциалом  $w = \varphi + i\psi$  и комплексной (сопряженной) скоростью  $\bar{z} = u + iv$  от вектора скорости  $\vec{z} = u - iv$ .

Предполагается, что скорость на поверхности струи постоянна и равна  $V_0$ . За проницаемой поверхностью ( $y < 0$ ) находится зона завихренного течения с прямолинейными линиями тока. Это явление связано с постоянством давления во вторичном потоке. Проницаемый контур моделируется поверхностью гидродинамического разрыва с граничными соотношениями вида [1,2]:

$$V(x, +0) = V(x, -0) \equiv V_n, \quad (1.1)$$

$$k\rho V_n = P(x, -0) - P(x, +0), \quad (1.2)$$

$$u(x, +0) = 0. \quad (1.3)$$

В области безвихренного движения ( $y > 0$ ) перед контуром справедлив интеграл Бернулли:

$$\rho(u^2 + v^2) + 2P = \rho v_0^2 + 2P_0.$$

С помощью (1.2) и постоянством давления во вторичном потоке получим граничное условие задачи [2].

$$u^2 + v^2 + 2a_0 v = 1, \quad (1.4)$$

здесь  $u$  и  $v$  – безмерные величины,  $a_0 = k/V_0$ .

Следовательно, задача имеет следующие краевые условия: на DABсоотношение (1.4), на линиях ВСи С'Dусловия постоянства давления, которые эквивалентно условию  $u^2 + v^2 = 1$ , на АН условие непроницаемости  $u = 0$ .

2. Для построения решения в области безвихревого движения отобразим область изменения комплексной скорости

$z = dw/(V_0 dz)$  наверхнюю полуплоскость параметрического переменного  $t (Imt \geq 0)$  (рис.3) и используем функцию Х. А. Рахматулина [1,2].

В плоскости годографа  $z = u - iv$  область течения СНС'DA соответствует круговая луночка (рис.2). Свободные линии тока ВСи С'D на которых выполняется условие  $u^2 + v^2 = 1$ , переходит в дугу единичной окружности, лежащую в верхней полуплоскости  $z$ .

Стенкам канала соответствует разрез СНС'. Соотношение (1.4) на проницаемой поверхности равносильно условию

$$(v + a_0)^2 + u^2 = (\sqrt{1 + a_0^2})^2,$$

поэтому линии DAB соответствует дуга окружности с центром в точке  $(0; -a_0)$  и радиусом  $\sqrt{1 + a_0^2}$ , эта окружность проходит через точки D и Вс координатами  $(-1; 0)$  и  $(1; 0)$  и пересекает ось  $v$  в точке

$$(0; \sqrt{1 + a_0^2} - a_0).$$

Найдем конформное отображение  $z$  на  $t$  с помощью нескольких последовательных конформных отображений [4]:

$$z = \frac{dw}{V_0 dz}, z_1 = \frac{z+1}{z-1}, z_2 = z_1 \cdot e^{i\lambda_0}, z_3 = (z_2)^{\pi/\theta_0};$$

$$z_n = \ln \frac{z_3}{|z_{1c}|} = \ln \left\{ A_1^*(t)^{C_1} \cdot \frac{B_1^*(t)}{n_1} \right\}; \lambda_0 = \frac{\pi}{2} + \theta_0;$$

$$A_1^*(t) = \frac{\sqrt{1+m}-\sqrt{1+n}}{\sqrt{1+m}+\sqrt{1+n}} \cdot \frac{\sqrt{t+m}+\sqrt{t+n}}{\sqrt{t+m}-\sqrt{t+n}}; C_1 = \frac{\sqrt{n \cdot m}}{h} = \gamma_0;$$

$$B_1^*(t) = \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{t+m} - \sqrt{m} \cdot \sqrt{t+n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{t+m} + \sqrt{m} \cdot \sqrt{t+n}} \cdot \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{1+m} - \sqrt{m} \cdot \sqrt{1+n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{1+m} + \sqrt{m} \cdot \sqrt{1+n}};$$

$$n_1 = |Z_{1c}| = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

$\theta_0$  – угол между касательными линиями в точке D (B)(рис.2).

Отображение дает формула

$$Z(t) = -\frac{1+e^{i\lambda_0 \cdot \{A_1^*(t)C_1 \cdot B_1^*(t)\}^{\theta_0/\pi}}}{1-e^{i\lambda_0 \cdot \{A_1^*(t)C_1 \cdot B_1^*(t)\}^{\theta_0/\pi}}}, \quad (2.1)$$

при этом обеспечено нужное соответствие характерных точек границы:

$$Z(\pm 0) = -1, \quad Z(\pm \infty) = 1, \quad Z(1) = \sqrt{1 + a_0^2} - a_0, \quad Z(-n) = e^{id},$$

$$Z(-h) = r \cdot e^{id} \quad (r = V_H/V_0).$$

3. Далее будем искать  $z = z(t)$ . Сначала найдем вспомогательную функцию, так называемую функцию X. А. Рахматулина[1,2].

$$X(t) = \ln \frac{dz}{dt} = a + ib. \quad (3.1)$$

Так как  $\ln \frac{dz}{dt} = \ln \left| \frac{dz}{dt} \right| + i \arg \left( \frac{dz}{dt} \right)$ . Нам надо найти  $\text{Im} X(t) = b = \arg \left( \frac{dz}{dt} \right)$ , где  $\arg \left( \frac{dz}{dt} \right)$  есть угол поворота бесконечно малого вектора при переходе от плоскости  $t$  к плоскости  $z$ . Далее, будем искать  $b(t)$  при  $t = \xi$ .

Из рис.1 и 3 видно, что:

$$\text{при } (-\infty < \xi < -n), \quad (BC) \quad b(\xi) = \pi/2 + \alpha + \Lambda_1(\xi);$$

$$(-n < \xi < -h), \quad (CH) b(\xi) = \pi/2 + \alpha, \quad (\text{стенки канала});$$

$$(-h < \xi < -m), \quad (HC') b(\xi) = -\alpha, \quad (\text{стенки канала});$$

$$(-m < \xi < 0), \quad (C'D) \quad b(\xi) = -\pi + \Lambda_2(\xi);$$

$$(0 < \xi < 1), \quad (DA) b(\xi) = 0;$$

$$(1 < \xi < +\infty), \quad (AB) b(\xi) = 0. \quad \Lambda(\xi) = \arctg \frac{V(\xi, 0)}{u(\xi, 0)}.$$

Упростим расчеты, для чего сделаем дополнительное дробно-линейное преобразование верхней полуплоскости  $t$  на себя:

$$t \rightarrow w, \quad w = -\frac{t}{t-2}, \quad t(w) = \frac{2w}{1+w},$$

здесь  $w$  – новая функция, а не комплексный потенциал. Перейдем к модифицируемым функциям

$X_1(w), \Lambda_1(\gamma)$  и  $\Lambda_2(\gamma) (\gamma = Rew)$ :

$$X_1(w) = X[t(w)]; \quad \Lambda_1^*(\gamma) = \Lambda_1\left(\frac{2\gamma}{1+\gamma}\right); \quad \Lambda_2^*(\gamma) = -\pi \cdot \Lambda_2\left(\frac{2\gamma}{1+\gamma}\right); \quad (3.3)$$

откуда можно найти аналитическую функцию  $X_1(w)$  по значению ее мнимой части на действительной оси  $\gamma$ :

$$\text{EB: } -\infty < \gamma < -1, \quad b(\gamma) = 0,$$

$$\text{BC: } -1 < \gamma < -n_1, \quad b(\gamma) = \pi/2 + \alpha + \Lambda_1^*(\gamma),$$

$$\text{CH: } -n_1 < \gamma < -h_1, \quad b(\gamma) = \pi/2 + \alpha,$$

$$\text{HC': } -h_1 < \gamma < -m_1, \quad b(\gamma) = -\alpha,$$

$$\text{C'D: } -m_1 < \gamma < 0, \quad b(\gamma) = -\pi - \pi\Lambda_2^*(\gamma),$$

$$\text{AD: } 0 < \gamma < 1, \quad b(\gamma) = 0,$$

$$\text{AE: } 1 < \gamma < +\infty, \quad b(\gamma) = 0.$$

$$\left( n_1 = \frac{-n}{n+2}, \quad m_1 = \frac{-m}{m+2}, \quad h_1 = \frac{-h}{h+2} \right)$$

Функцию  $X_1(w)$  можно восстановить по формуле Шварца [4]:

$$X_1(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im} X_1(\gamma)}{\gamma - w} d\gamma + C = \ln \left\{ \frac{h_1 + w}{1 + w} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \frac{(h_1 + w)^2}{w(1 + w)} \right\}^{\alpha/\pi} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{-n_1} \frac{\Lambda_1^*(\gamma)}{\gamma - w} d\gamma - \int_{-m_1}^0 \frac{\Lambda_2^*(\gamma)}{\gamma - w} d\gamma \right\} + C.$$

здесь  $C$  – произвольная действительная постоянная. Используя (2.1)–(3.3), находим искомую постоянную  $Z(t)$  в виде

$$Z(t) = C_0 \int_1^t \left\{ \frac{(1-h_1)\tau + 2h_1}{2} \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \frac{((1-h_1)\tau + 2h_1)^2}{2\tau} \right\}^{\alpha/\pi} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{-n_1} \frac{\Lambda_1^*(\gamma)}{\gamma - \frac{\tau}{2-\tau}} d\gamma - \int_{-m_1}^0 \frac{\Lambda_2^*(\gamma)}{\gamma - \frac{\tau}{2-\tau}} d\gamma \right\} d\tau. \quad (3.4)$$

$$\Lambda_1^*(\gamma) = \Lambda_2^*(\gamma) = -\frac{\pi}{\alpha} \arctg \frac{2[A_*^{C_1}(\gamma) \cdot B_*(\gamma)]^{\theta_0/\pi}}{1 - [A_*^{C_1}(\gamma) \cdot B_*(\gamma)]}. \quad (3.5)$$

Формулы (2.1) и (3.4) дают параметрическое решение задачи о набегании плоской струи, вытекающей из канала идеальной несжимаемой жидкости на бесконечную плоскую проницаемую поверхность. Положительная действительная постоянная  $C_0$  в (3.4) определяется из условия, что ширины канала известны ( $L$ ). Вычислим геометрический элемент  $L$  (ширины канала) рис.1. Очевидно  $q = LV_H$  откуда  $L = q/V_H$ . Скорость  $V_H$  в канале определяется

формулой  $\frac{V_H}{V_0} e^{i\alpha} = \left( \frac{dw}{V_0 dz} \right)_H$ ; откуда  $V_H = V_0 e^{i\alpha} \Im(-h)$ .

$$\text{Следовательно, } L = \frac{q}{V_0 \cdot \Im(-h)} e^{i\alpha} \quad (3.8).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х.А., Гувернюк С.В., О постановке задач обтекания проницаемых тел несжимаемой средой.// Парашюты и проницаемые тела. М.: Изд. МГУ, 1987. С. 5-24.
2. П.Р.Андронов, С.Б.Гувернюк. Решение задачи о плоской струе, натекающей на бесконечный проницаемый экран// Проблемы современной механики. М.: Изд. МГУ Ин-т механики 1998. С.179-185.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 4-е М.: Наука 1973. 606с.
4. Абдылдаев М.Ю., Шамурзаев К.Т. Решение задачи о симметричном обтекании проницаемой пластинки струей вытекающей из канала. Вестник. КНУ им.Ж.Баласагына. Вып.1. Бишкек. 2013. С. 6-10.