

ОТОБРАЖЕНИЯ СО ВТОРОЙ АКСИОМОЙ СЧЕТНОСТИ

Ишмахамаметов К.

КРСУ им. Ельцина

Все рассматриваемые пространства предполагаются топологическими, отображения непрерывными. В данной работе на отображения распространяются некоторые понятия и утверждения касающихся пространств.

Определение 1 [1]. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ система N подмножеств пространства X называется сетью (соответственно π -сетью) отображения f , если для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности O_x найдется такое открытое в Y множество U и такое множество $V \in N$, что $x \in V \cap f^{-1}U \subseteq O_x$ (соответственно, $V \cap f^{-1}U \subseteq O_x$).

Сеть (π -сеть) отображения f , состоящая из открытых в X множеств, называется базой (π -базой) отображения f .

Теорема 1. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ система N подмножеств пространства X является сетью (соответственно, π -сетью), если и только, если для любого открытого в X множества O существуют подсистема $\{N_\alpha: \alpha \in A\} \subseteq N$ и открытые в Y множества $\{U_\alpha: \alpha \in A\}$ такие, что

$$\bigcup_{\alpha \in A} (N_\alpha \cap f^{-1}U_\alpha) = O \text{ (соответственно, } \bigcup_{\alpha \in A} (N_\alpha \cap f^{-1}U_\alpha) \subseteq O \text{)}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть O - произвольное открытое в X множество и $x \in O$. Существуют открытое в Y множество U_x и такое множество $N_x \in N$, что $x \in N_x \cap f^{-1}U_x \subseteq O$ (соответственно, $N_x \cap f^{-1}U_x \subseteq O$).

Тогда ясно, что $\bigcup_{x \in O} (N_x \cap f^{-1}U_x) = O$ (соответственно, $\bigcup_{x \in O} (N_x \cap f^{-1}U_x) \subseteq O$) и $\{N_x : x \in O\} \subseteq N$, $\{U_x : x \in O\}$ искомые системы.

Достаточность. Пусть O - произвольная окрестность точки $x \in O$. По допущению существуют подсистема $\{N_\alpha : \alpha \in A\} \subseteq N$ и открытые в Y множества $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ такие, что $\bigcup_{\alpha \in A} (N_\alpha \cap f^{-1}U_\alpha) = O$ (соответственно, $\bigcup_{\alpha \in A} (N_\alpha \cap f^{-1}U_\alpha) \subseteq O$). Тогда, $x \in N_{\alpha_0} \cap f^{-1}O_{\alpha_0} \subseteq O$ для некоторого $\alpha_0 \in A$ (соответственно, $N_\alpha \cap f^{-1}U_\alpha \subseteq O$ даже для любого $\alpha \in A$). Теорема доказана.

Замечание 1. В случае, когда система N состоит из открытых множеств другой топологии, то N называется квазибазой (квази π -базой) отображения f . Другими словами, если $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ и $N = \tau_f \neq \tau$, то $N = \tau_f$ называется квазибазой (квази π -базой) отображения f .

Следствие 1. Утверждение теоремы 1 остается верным и тогда, когда N есть база (π -база), квазибаза (квази π -база) отображения f .

Определение 2. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется отображением со счетной сетью (соответственно, π -сетью), если оно обладает счетной сетью (соответственно, π -сетью) N .

Если система N состоит из открытых в X множеств, то f называется отображением со второй аксиомой счетности (соответственно, со второй π -аксиомой счетности). Если же $N = \tau_f$ другая топология, то f называется отображением со счетной квазибазой (соответственно, квази π -базой).

Теорема 2. Если $f : X \rightarrow Y$ отображение со счетной сетью, то А) из любого открытого в X покрытия ω слоя, $f^{-1}y$ каждой точки $y \in Y$ можно выделить не более чем счетное подпокрытие ω' .

Доказательство. Пусть N - некоторая счетная сеть отображения f , $y \in Y$ и $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$ - произвольное открытое в X покрытие слоя $f^{-1}y$.

Для каждого $x \in f^{-1}y$ обозначим через $O_{\alpha(x)}$ один из элементов покрытия ω содержащих точку x . Существуют множество $N_{n(x)} \in N$ и открытое в Y множество $G_{n(x)}$ такие, что $x \in N_{n(x)} \cap f^{-1}G_{n(x)} \subseteq O_{\alpha(x)}$, ясно, что $\bigcup_{x \in f^{-1}y} (N_{n(x)} \cap f^{-1}G_{n(x)}) \supseteq f^{-1}y$. Теперь, обозначив через O_n одно из содержащих $N_{n(x)} \cap f^{-1}G_{n(x)}$ множеств $O_{\alpha(x)}$ получим не более чем счетное подпокрытие $\omega' = \{O_n\}$ покрытия ω . Теорема доказана.

Следствие 2. Для отображения со второй аксиомой счетности, утверждение теоремы 2 остается справедливым.

Определение 3. Отображение f со свойством A) назовем финально компактным.

Класс финально компактных отображений шире, чем класс отображений со счетной сетью (со второй аксиомой счетности).

Как обычно, для системы $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$ подмножеств пространства X считается $\bigcup \omega = \bigcup \{O_\alpha : \alpha \in A\}$.

Определение 4. Говорят, что отображение $f : X \rightarrow Y$ обладает (обобщенным) свойством Линделёфа, если всякая система ω (произвольных) открытых в X подмножеств покрывающих слой $f^{-1}y$, $y \in Y$ обладает не более чем счетной подсистемой ω' также покрывающей $f^{-1}y$, $y \in Y$ с тем же объединением что и система ω , т.е. $\bigcup \omega = \bigcup \omega'$.

Теорема 3. Отображение со второй аксиомой счетности (со второй π -аксиомой счетности) обладает свойством Линделёфа.

Доказательство. Пусть $\omega = \{O\}$ - произвольная система открытых в X подмножеств O , покрывающая слой $f^{-1}y$ произвольной точки $y \in Y$ и $\tau_f = \{U_n\}$ - некоторая счетная база отображения f . Элемент $U \in \tau_f$ назовем отмеченным элементом базы τ_f , если существует такое открытое в Y множество G , что $U \cap f^{-1}G \subseteq O$ для некоторого $O \in \omega$.

Каждому отмеченному элементу $U_{n_k} \in \omega$ поставим в соответствие элемент $O_k \in \omega$, который содержит $U_{n_k} \cap f^{-1}G_k$. Пусть $\omega' = \{O_k\} \subset \omega$, $\bigcup \{O_k\} = M$, $\bigcup \{O_k\} = M'$ и $\bigcup \{U_{n_k} \cap f^{-1}G_k\} = N$, где U_{n_k} отмеченный элемент базы τ_f . Заметим, что $M = N$. Действительно, поскольку, очевидно, что $N \subseteq M$, то остается показать, что $M \subseteq N$. Пусть $x_0 \in M$. Поскольку τ_f база, то существует ее отмеченный элемент U_{n_0} такой, что $x_0 \in U_{n_0} \cap f^{-1}G_0 \subseteq O_{i_0}$, т.е. $M \subseteq N$. Поэтому $M = N$. С другой стороны, ясно, что $M = N = \bigcup \{U_{n_k} \cap f^{-1}G_k\} \subseteq \bigcup \{O_k\} = M'$, а так как $M' \subseteq M$, то $M' = M$. Теорема доказана.

Следствие 3. Всякое отображение со второй аксиомой счетности финально компактно.

Замечание 2. В определении 4 вместо слоя $f^{-1}y$ можно взять любое подмножество $X' \subseteq X$ и тогда теорема 3 остается справедливой.

Определение 5 [1]. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется регулярным, если для любой точки $x \in X$ и любого замкнутого в X множества F не содержащего точку x существует такая окрестность G точки fx в Y , что точка x и множество $F \cap f^{-1}G$ отделимы окрестностями в $f^{-1}G$.

Теорема 4. Отображение $f: X \rightarrow Y$ регулярно тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности $U \subset X$ существуют такие окрестность G точки fx в Y и открытое в $f^{-1}G$ множество V , что $x \in V \subseteq [V]_{f^{-1}G} \subseteq U \cap f^{-1}G \subset U$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f: X \rightarrow Y$ регулярно, $x \in X$ и U любая ее окрестность. Положим $F = X \setminus U$, тогда F замкнуто в X и $x \notin F$. Из регулярности отображения f следует существование окрестности $G \subseteq Y$ точки fx , открытых множеств $V, W \subseteq f^{-1}G$, таких что $x \in V$, $F \cap f^{-1}G \subseteq W$ и $V \cap W = \emptyset$. Ясно, что $V \subset f^{-1}G \setminus W$ и $f^{-1}G \setminus W$ замкнуто в $f^{-1}G$. Имеем $x \in V \subseteq [V]_{f^{-1}G} \subset [f^{-1}G \setminus W]_{f^{-1}G} = f^{-1}G \setminus W$. Поскольку $F \cap f^{-1}G \subseteq W$, то

$f^{-1}G \setminus W \subseteq f^{-1}G \setminus (F \cap f^{-1}G) = f^{-1}G \setminus F = f^{-1}G \setminus (X \setminus U) = (f^{-1}G \setminus X) \cup (f^{-1}G \cap U) = f^{-1}G \cap U \subset U$.
Достаточность. Пусть $x \in X, F$ замкнуто в X и $x \notin F$. Множество $X \setminus F = V$ открыто в X и $x \in U$. Существуют такие окрестность G точки f_x в Y и открытое множество $V \subset f^{-1}G$, что $x \in V \subseteq [V]_{f^{-1}G} \subset U \cap f^{-1}G \subset U$. Множество $W = f^{-1}G \setminus [V]_{f^{-1}G}$ открыто в $f^{-1}G$ и $W = f^{-1}G \setminus [V]_{f^{-1}G} \supset f^{-1}G \setminus U \supset f^{-1}G \cap (X \setminus U) = f^{-1}G \cap F$. Очевидно, что $V \cap W = \emptyset$.

Теорема доказана.

Отметим, что из теоремы 4, в случае когда $Y = \{p\}$ одноточечное пространство, следует критерий регулярности пространств.

Определение 6 [1]. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется нормальным, если для любой точки $y \in Y$ любые два дизъюнктивные, замкнутые в слое $f^{-1}y$ множества отделимы в X окрестностями.

Теорема 5. Регулярное финально компактное отображение $f: X \rightarrow Y$ нормально.

Доказательство. В силу регулярности отображения f слой $f^{-1}y$ является регулярным для любой точки $y \in Y$.

Действительно, пусть $x \in f^{-1}y$, F замкнуто в $f^{-1}y$ и $x \notin F$. Существует замкнутое в X множество $\tilde{F}$ такое, что $\tilde{F} \cap f^{-1}y = F$ и $x \notin \tilde{F}$. Отображение f регулярно, поэтому существует окрестность O точки f_x и в трубке $f^{-1}O$ множества $\{x\}$ и $\tilde{F}$ отделимы окрестностями, т.е. существуют такие открытые в $f^{-1}O$ множества $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$, что $x \in \tilde{U}_1, \tilde{F} \cap f^{-1}O \subset \tilde{U}_2$ и $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$. Множества $U_1 = \tilde{U}_1 \cap f^{-1}y, U_2 = \tilde{U}_2 \cap f^{-1}y$ открыты в $f^{-1}y, x \in U_1, F \subseteq U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Регулярность слоя $f^{-1}y$ доказана.

Пусть теперь множества F_1, F_2 замкнуты в $f^{-1}y$ и $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Покажем, что F_1, F_2 отделимы в X окрестностями. Пусть $x \in F_1$. Множество $U_x = f^{-1}y \setminus F_2$ является окрестностью точки x в $f^{-1}y$. Существует открытое в X множество $\tilde{U}_x$ такое, что $\tilde{U}_x \cap f^{-1}y = U_x$ и $x \in \tilde{U}_x$. В силу регулярности f

существуют такие окрестности G_x точки f_x в Y и открытое в $f^{-1}G_x$ (и в X) множество V_x , что $x \in V_x \subset [V_x]_{f^{-1}G_x} \subset \tilde{U}_x \cap f^{-1}G_x \subset \tilde{U}_x$. Множество $[V_x]_{f^{-1}G_x}$ не пересекает F_2 , т.е. $[V_x]_{f^{-1}G_x} \cap F_2 = \emptyset$. Множество $[V_x]_X$ в трубке $f^{-1}G_x$ высекает множество $[V_x]_{f^{-1}G_x}$ и $[V_x]_X \cap F_2 = \emptyset$. Таким образом, множество V_x открыто в X и $[V_x]_X \cap F_2 = \emptyset$. Система $\{V_x : x \in F_1\}$ есть открытое в X покрытие множества F_1 . Положим, $V' = f^{-1}y \setminus F_1$. Тогда множество V' открыто в $f^{-1}y$. Существует такое открытое в X множество V , что $V \cap f^{-1}y = V'$. Система открытых в X множеств $\omega = \{V_x : x \in F_1\} \cup \{V\}$ является покрытием слоя $f^{-1}y$. В силу финальной компактности отображения f из покрытия ω можно выделить не более чем счетное подпокрытие $\omega' = \{V, V_1, V_2, \dots, V_n, \dots\}$ покрывающее слой $f^{-1}y$. Система $\omega' \setminus \{V\} = \{V_1, V_2, \dots, V_n, \dots\}$ есть не более чем счетное покрытие множества F_1 , т.е. $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \supseteq F_1$, причем $[V_i]_X \cap F_2 = \emptyset$ для любого i .

Аналогичным образом построим не более чем счетное покрытие $\{W_1, W_2, \dots, W_n, \dots\}$ множества F_2 со свойством $\bigcup_{j=1}^{\infty} W_j \supseteq F_2$ и $[W_j]_X \cap F_1 = \emptyset$ для любого j .

Теперь по нормализующей лемме [2] стр.56, множества F_1 и F_2 имеют дизъюнктные в X окрестности. Нормальность отображения f доказана.

Следствие 4. Регулярное финально компактное отображение послойно нормально, т.е. для любого $y \in Y$ слой $f^{-1}y$ нормален.

Из теоремы 5, в силу следствия 3 теоремы 3 получаем:

Теорема 6. Регулярное отображение со второй аксиомой счетности нормально.

Отметим, что в случае, когда Y одноточечное пространство из теорем 1-6 следуют соответствующие утверждения для пространств. В частности, из теоремы 2 следует теорема Линделёфа [2], из теоремы 5

следует теорема Веденисова [2], а из теоремы 6 следует теорема Тихонова [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.А. Пасынков. О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств. Отображения и функторы. Сборник. Москва, Изд-во МГУ, 1984.
2. П.С. Александров, Б.А. Пасынков. Введение в теорию размерности. Изд. «Наука», Москва, 1973.