

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗРЫВА В АТМОСФЕРНОМ ГАЗЕ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ ДАВИДОВА

Чечейбаев А.Б., Чечейбаев Б., Эстебесова Н.Т.

КНУ им. Ж. Баласагына

Одним из мощных методов современного вычислительного эксперимента является метод крупных частиц, разработанный Ю.М. Давыдовым [1, 2 и др.]. Метод крупных частиц широко используется при решении задач науки и технологий - в механике сплошных сред, газовой динамике, гидродинамике, физике плазмы, нефте- и газодобыче и др.

Рассмотрим задачу о взрыве в атмосфере. Математической моделью задачи является нестационарная система уравнений Эйлера, состоящая из уравнений неразрывности, импульса и энергии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{U}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot u \cdot \vec{U}) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot v \cdot \vec{U}) + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot E \cdot \vec{U}) + \operatorname{div}(p \cdot \vec{U}) = 0 \quad (4)$$

где ρ - плотность газа, p - давление газа, U - скорость газа, E - удельная полная энергия. Система (1) - (4) замыкается уравнением состояния:

$$p = \rho \cdot I \cdot (\gamma - 1), \quad (5)$$

здесь $I = E - \frac{1}{2} \cdot (u^2 + v^2)$ - удельная внутренняя энергия, γ - показатель адиабаты среды, принятый равным 1,4 в данной работе.

Исходная система (1) - (5) приводится к безразмерному виду, используя в качестве характерных физических параметров характерную скорость U_0 , характерную длину l_0 и характерную плотность ρ_0 . Тогда остальные характерные параметры задачи определяются так: $p_0 = \rho_0 \cdot U_0^2$, $E_0 = U_0^2$, $t_0 = l_0/U_0$. Положим, что $U_0 = 10^{5/2}$ м/с, $\rho_0 = 1$ кг/м³, $l_0 = 1$ м, $p_0 = 10^5$ Па, $E_0 = 10^5$ Дж. Безразмерные величины представляются в следующем виде: $\tilde{l} = l/l_0$, $\tilde{U} = U/U_0$, $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$, $\tilde{p} = p/(\rho_0 \cdot U_0^2)$, $\tilde{E} = E/(\rho_0 \cdot U_0^2)$.

Для расчета взрыва в атмосфере используем классический алгоритм метода крупных частиц, предложенный в кандидатской диссертации Ю.М. Давыдова для решения задач газовой динамики [1].

Эйлеров этап. На данном этапе пренебрегаем потоками массы, импульса и энергии через границы эйлеровых ячеек. Тогда дифференциальные уравнения и разностные схемы примут следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \rho \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\tilde{u}_{i,j}^n = u_{i,j}^n - \frac{p_{i+\frac{1}{2},j}^n - p_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x}, \quad (7)$$

$$\tilde{v}_{i,j}^n = v_{i,j}^n - \frac{p_{i,j+\frac{1}{2}}^n - p_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y}, \quad (8)$$

$$\tilde{E}_{i,j}^n = E_{i,j}^n - \frac{p_{i+\frac{1}{2},j}^n u_{i+\frac{1}{2},j}^n - p_{i-\frac{1}{2},j}^n u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n} - \frac{p_{i,j+\frac{1}{2}}^n v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - p_{i,j-\frac{1}{2}}^n v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n}, \quad (9)$$

где параметры на границах ячеек, рассчитываются, например, так:

$$p_{i+\frac{1}{2},j}^n = \frac{p_{i+1,j}^n + p_{i,j}^n}{2}.$$

Лагранжев этап. На этом этапе вычисляются эффекты переноса, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю

эйлерову сетку. Здесь находятся за время Δt потоки массы ΔM^n через границы эйлеровых ячеек.

Исходное уравнение неразрывности (1) в разностной форме запишется так (в предположении, что поток жидкости через ячейку (i, j) направлен слева направо и снизу вверх):

$$\rho_{i,j}^{n+1} \cdot \Delta x \cdot \Delta y = \rho_{i,j}^n \cdot \Delta x \cdot \Delta y + \Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n - \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n + \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n \quad (10)$$

На этом этапе вычисляются потоки массы ΔM^n :

$$\begin{aligned} \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n &= \langle \rho_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle \cdot \Delta y \cdot \Delta t, \quad \Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n = \langle \rho_{i-\frac{1}{2},j}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n \rangle \cdot \Delta y \cdot \Delta t, \\ \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n &= \langle \rho_{i,j+\frac{1}{2}}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^n \rangle \cdot \Delta x \cdot \Delta t, \quad \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n = \langle \rho_{i,j-\frac{1}{2}}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \rangle \cdot \Delta x \cdot \Delta t, \end{aligned} \quad (11)$$

где, например, поток массы через правую границу ячейки $\Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n$ определялись по формулам первого порядка точности:

Если $u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n > 0$, то $u_{i+1/2,j}^n = (u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n) / 2$, $\rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i,j}^n$.

Если $u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n < 0$, то $u_{i+1/2,j}^n = (u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n) / 2$, $\rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i+1,j}^n$.

(12)

Заключительный этап. Здесь происходит перераспределение массы, импульса и энергии по пространству и определяются окончательные поля эйлеровых физических параметров потока на фиксированной расчетной сетке в следующий момент времени $t^{n+1} = t^n + \Delta t$.

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \frac{\sum \Delta M_k}{\Delta x \cdot \Delta y} = \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n - \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n + \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x \cdot \Delta y}, \quad (13)$$

$$X_{i,j}^{n+1} = \frac{\rho_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}} \tilde{X}_{i,j}^n + \frac{\tilde{X}_{i-1,j}^n \Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n - \tilde{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n + \tilde{X}_{i,j-1}^n \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \tilde{X}_{i,j+1}^n \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\rho_{i,j}^{n+1} \cdot \Delta x \cdot \Delta y}, \quad (14)$$

где $X = \{u, v, E\}$.

Для моделирования граничных условий на границах области интегрирования применялся метод фиктивных ячеек, разработанный автором метода Ю.М. Давыдовым [1 и др.].

Условие свободного вытекания, например, на правой границе области интегрирования, достигалось следующими условиями для двух слоев фиктивных ячеек:

$$\begin{aligned}\rho_{N+1,j}^n &= \rho_{N,j}^n, \quad p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n, \quad E_{N+1,j}^n = E_{N,j}^n, \quad u_{N+1,j}^n = u_{N,j}^n, \quad v_{N+1,j}^n = v_{N,j}^n \\ u_{N+2,j}^n &= 2 \cdot u_{N,j}^n - u_{N-1,j}^n, \quad v_{N+2,j}^n = 2 \cdot v_{N,j}^n - v_{N-1,j}^n, \\ E_{N+2,j}^n &= 2 \cdot E_{N,j}^n - E_{N-1,j}^n, \quad p_{N+2,j}^n = 2 \cdot p_{N,j}^n - p_{N-1,j}^n, \quad \rho_{N+2,j}^n = 2 \cdot \rho_{N,j}^n - \rho_{N-1,j}^n.\end{aligned}$$

Условия непротекания на нижней границе области интегрирования:

$$\begin{aligned}\rho_{i,M-1,j}^n &= \rho_{i,M}^n, \quad p_{i,M-1,j}^n = p_{i,M}^n, \quad E_{i,M-1,j}^n = E_{i,M}^n, \quad u_{i,M-1,j}^n = u_{i,M}^n, \\ v_{i,M-1,j}^n &= -v_{i,M}^n.\end{aligned}$$

Имитация взрыва в атмосфере достигалась постановкой условия, предложенного в работе [4]:

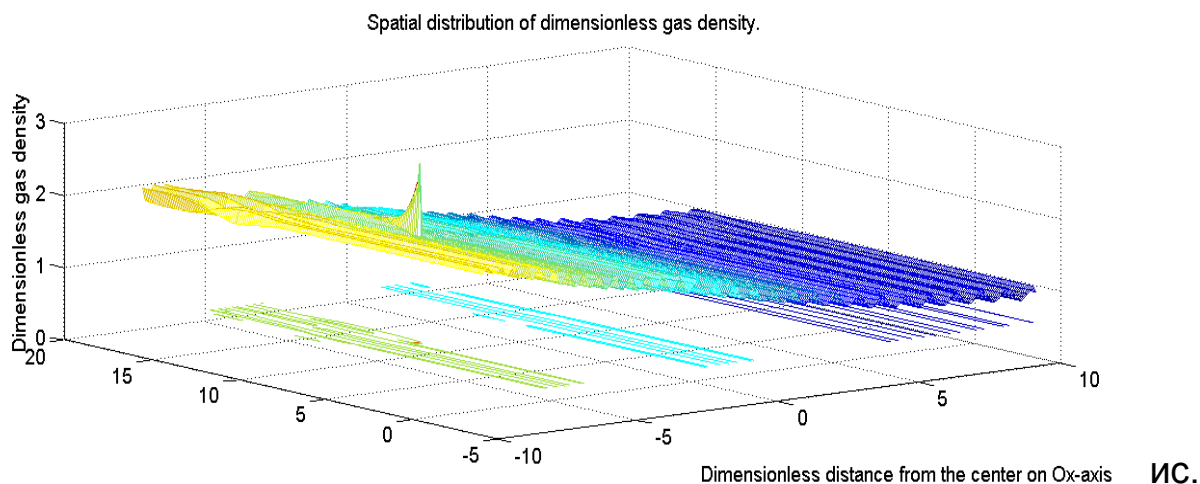
$$\rho_{k,l}^n = M \cdot \rho_{start},$$

где M – коэффициент, характеризующий мощность взрыва, ρ_{start} – начальная плотность невозмущенного газа. До начала взрыва газ принимался покоящимся (скорость равна нулю), $\tilde{\rho} = 1, \tilde{p} = 1$.

В первой серии проведенных вычислительных экспериментов область интегрирования представляла собой квадрат, разбитый на 201 ячейку по каждой стороне. Адрес ячейки взрыва в атмосфере: номер ячейки по горизонтальной оси равен 101 слева направо, а по вертикальной оси – 41 ячейка снизу вверх. На левой, верхней и правой границах области интегрирования ставились условия свободного вытекания, а на нижней – условия непротекания. Коэффициент M в ячейке взрыва варьировался в пределах интервала [1; 30]. Безразмерные шаги интегрирования выбраны так: $\widetilde{dx}=0.1$, $\widetilde{dy}=0.1$, $\widetilde{dt}=0.01$.

На рис. 1 представлено распределение безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=3000$. Горизонтальными

осями графика служат безразмерные расстояния от точки взрыва параллельно сторонам области интегрирования.



1.

На рис. 3. изображено распределение безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=3000$. По горизонтальной оси отложено безразмерное расстояние от точки взрыва вдоль горизонтальной линии области интегрирования. $M=3$.

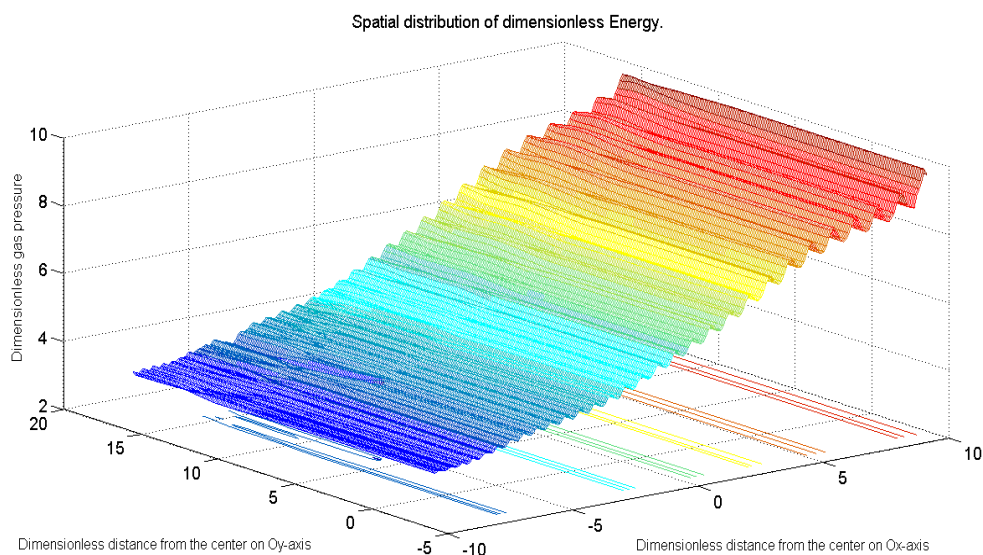


Рис. 2. $M=3$. Распределение безразмерной удельной энергии газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=3000$.

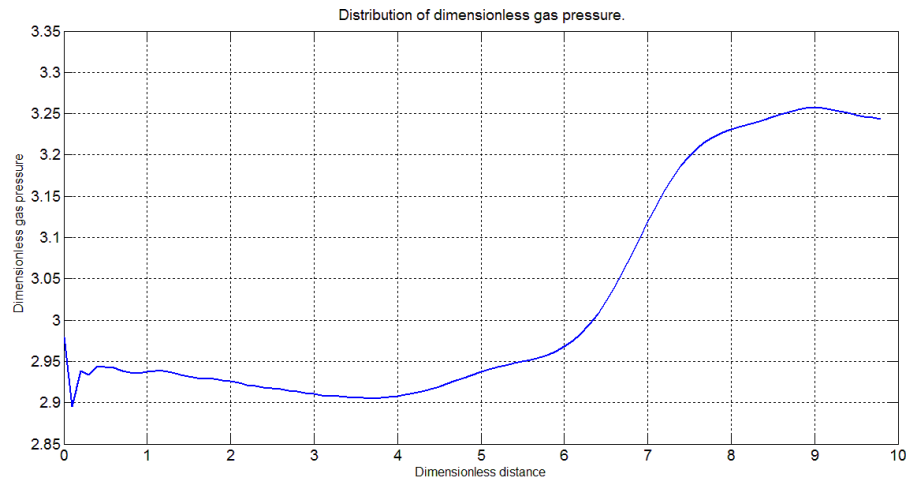


Рис. 3.

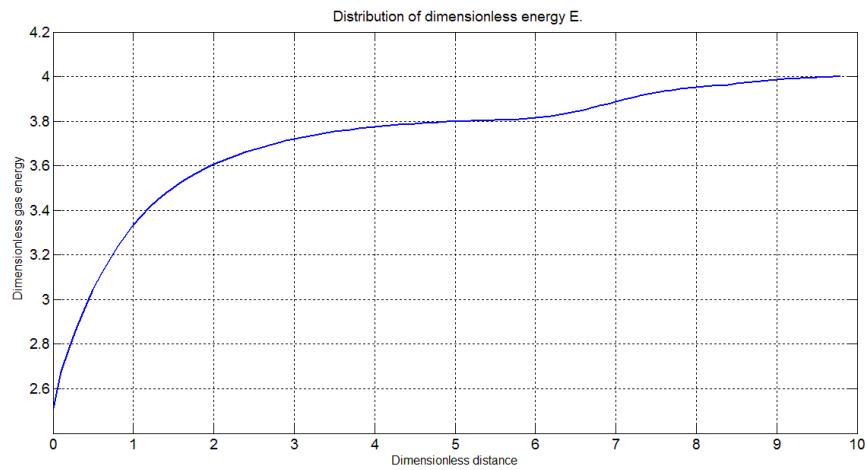


Рис. 4. $M=3$. Распределение безразмерной удельной энергии газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=3000$.

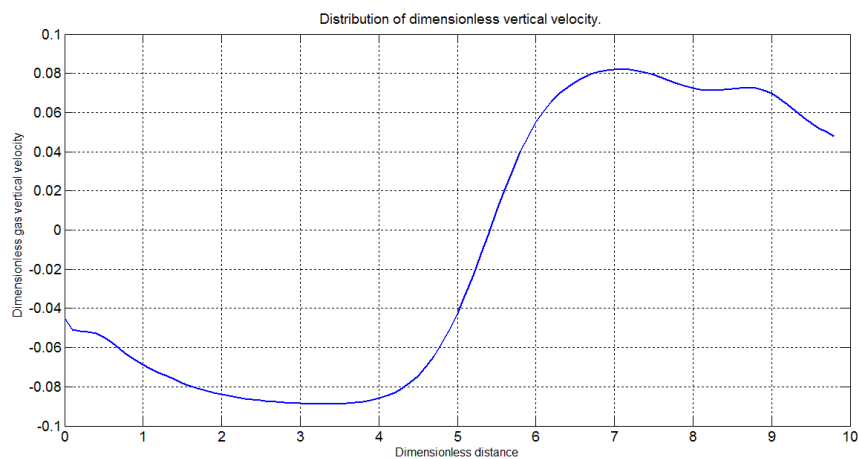


Рис. 5. $M=3$. Распределение безразмерной вертикальной составляющей вектора скорости газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=300$.

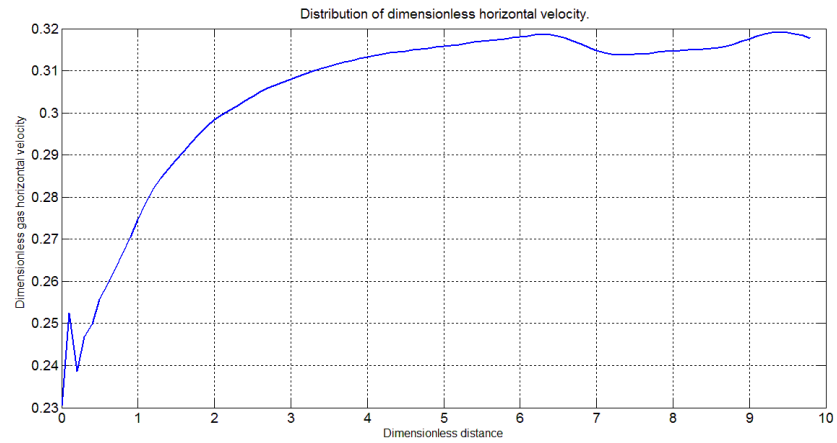


Рис. 6. $M=3$. Распределение безразмерной горизонтальной составляющей вектора скорости газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=3000$.

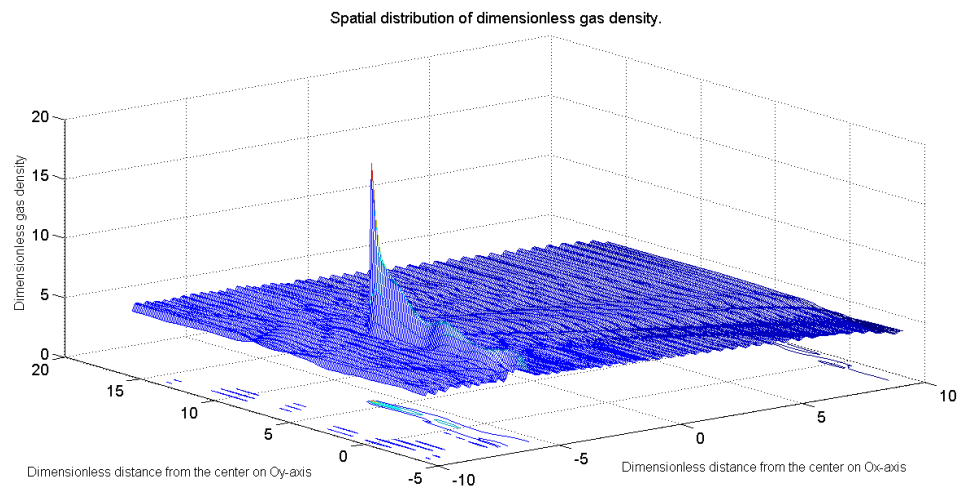


Рис. 7. $M=20$. Распределение безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=2500$.

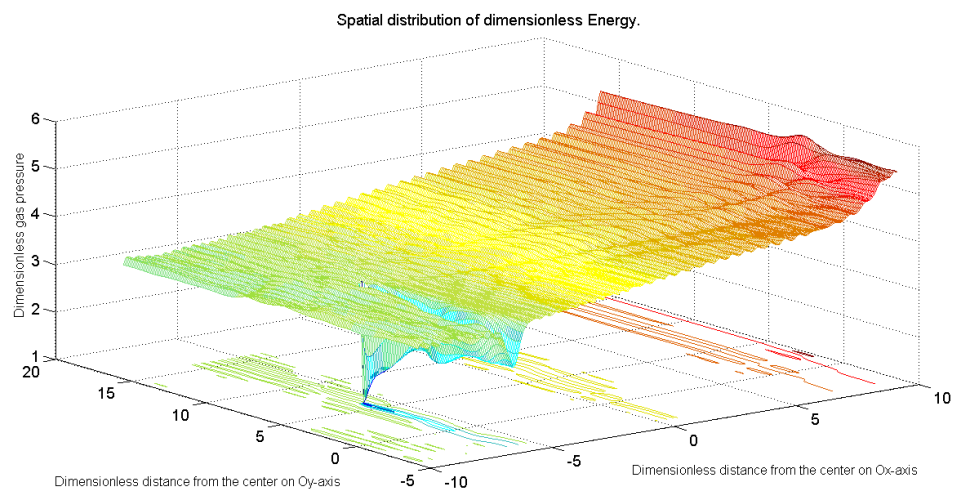


Рис. 8. $M=20$. Распределение безразмерной удельной энергии газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=2500$.

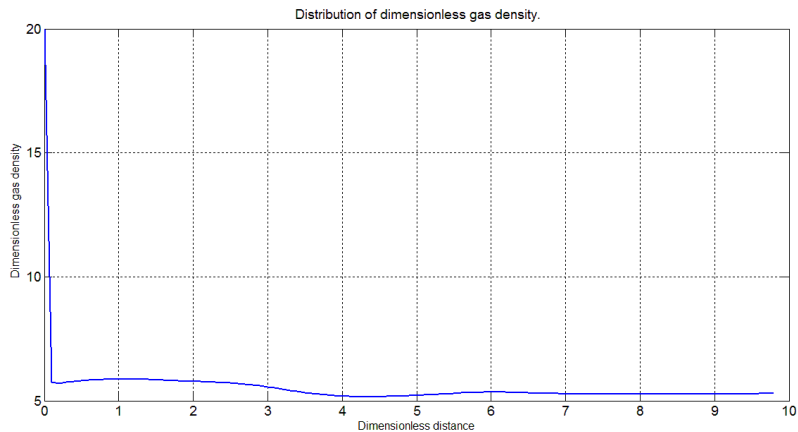


Рис. 9. $M=20$. Профиль безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=2500$.

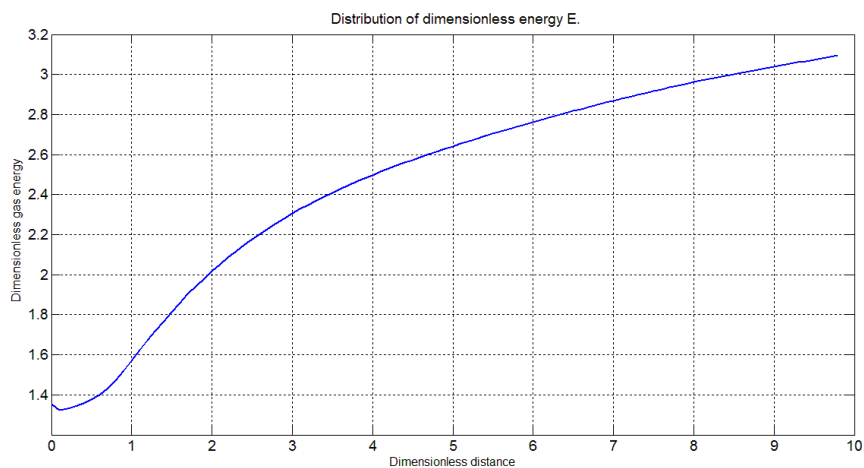


Рис. 10. $M=20$. Профиль безразмерной удельной энергии газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=2500$.

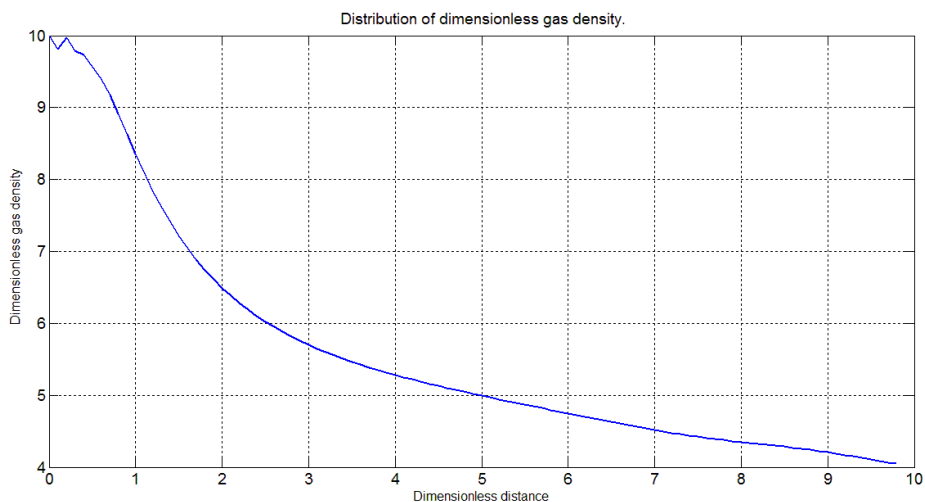


Рис. 11. $M=20$. Профиль безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=2500$.

Во второй серии проведенных численных расчетов область интегрирования представляла собой квадрат, разбитый на 201 ячейку по каждой стороне. Ячейка взрыва находится в центре области интегрирования: номер ячейки по горизонтальной оси равен 101 слева направо, по вертикальной оси также 101 ячейка снизу вверх. На всех четырех границах области интегрирования ставились условия свободного вытекания. Коэффициент M в ячейке взрыва варьировался в пределах интервала $[1; 30]$. Безразмерные шаги интегрирования выбраны так: $\widetilde{dx}=0.1$, $\widetilde{dy}=0.1$, $\widetilde{dt}=0.01$.

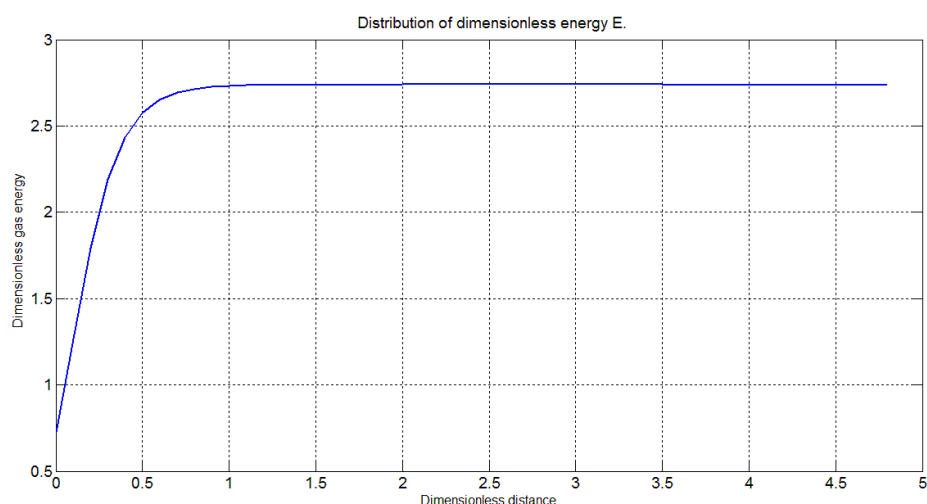


Рис. 12. $M=5$. Профиль безразмерной удельной энергии газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=1000$.

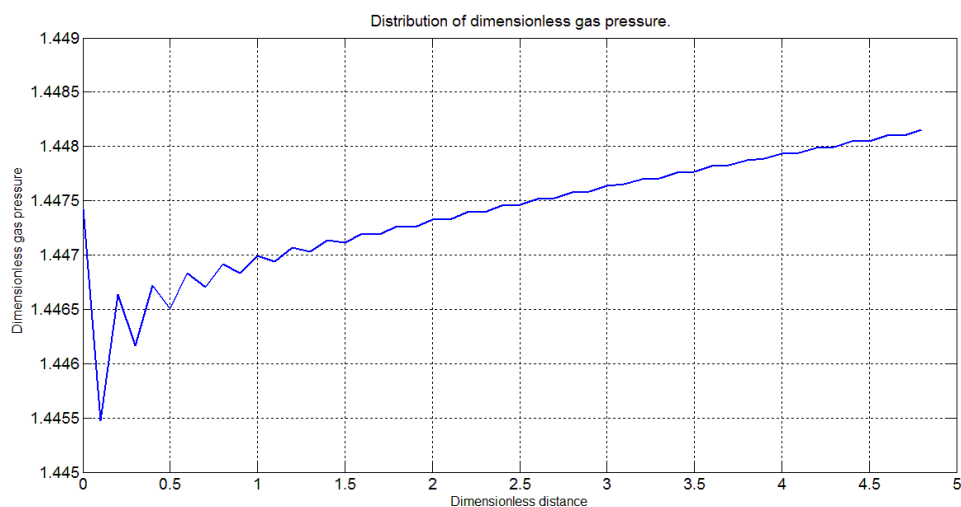


Рис. 12. $M=5$. Профиль безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=1000$.

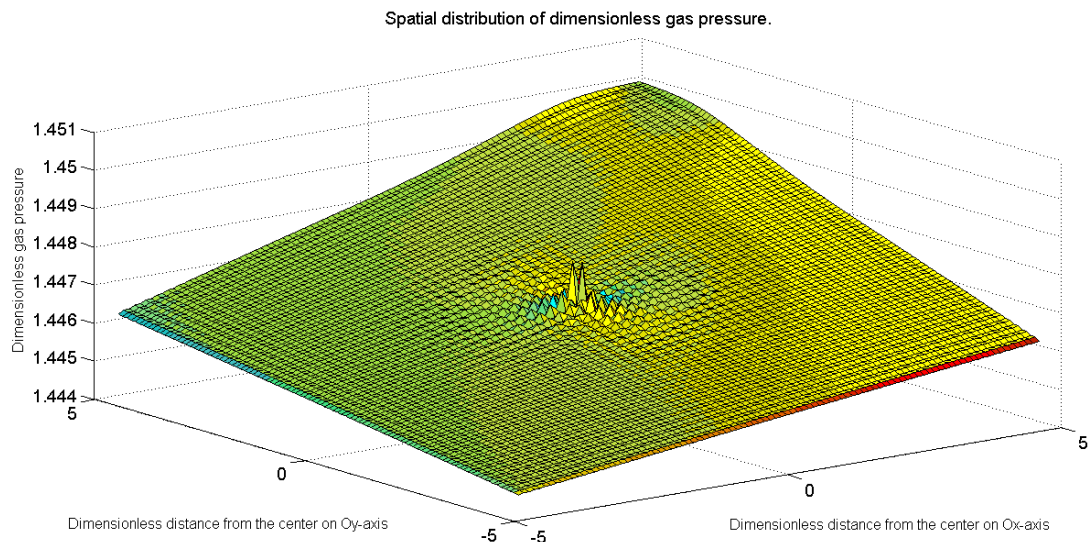


Рис. 13. $M=5$. Распределение безразмерной плотности газа в безразмерный момент времени $\tilde{t}=1000$

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц для задач газовой динамики. Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ. - мат. наук. – М.: МФТИ, 1970. – 183 с.
2. Yuri M. Davydov. Large-Particle Method. - In.: Encyclopaedia of Mathematics, vol.5. - Dordrecht/Boston/London: Kluwer academic publishers, 1990, p.p. 358-360.
3. Давыдов Ю.М., Чечейбаев Б., Давыдова И.М. и др. Исследование актуальных проблем механики и машиностроения. /Под ред. Ю.М. Давыдова, в 5-ти томах. – М.: НАПН РФ, 1995. - 1658 с.
4. Акжолов М.Ж., Мадера А.Г., Сотников А.Н. Численные методы решения задач математической физики на высокопроизводительном вычислительном комплексе МСЦ в режиме удаленного доступа. – М.: Московский гос. ин-т радиотехники, электроники и автоматики, 2005. – 64 с.