

О БАЗАХ И ПРЕДБАЗАХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Ишмахаметов К.

КРСУ им. Б.Ельцина

Все встречающиеся в работе пространства предполагаются топологическими, а отображения непрерывными.

Определение 1. [1] Для отображения $f: X \rightarrow Y$ система N подмножеств пространства X называется сетью (соответственно π -сетью) отображения f , если для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U_x найдутся такое открытое в Y множество O и такое множество $V \in N$, что А) $x \in V \cap f^{-1}O \subset U_x$ (соответственно В) $V \cap f^{-1}O \subset U_x$).

Замечание 1. В случае А) каждое множество O содержит точку fx , т.е. является ее окрестностью, а в случае В) может и не содержать точку fx . Если же в этом случае С) каждое множество O будет содержать точку fx , то система N будет называться сильной π -сетью.

Сеть, π -сеть, сильная π -сеть отображения f , состоящая из открытых в X множеств, соответственно называется базой [1], π -базой, [1], сильной π -базой отображения f .

Определение 2. Для отображения $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ топология τ_f (в общем случае $\tau_f \subsetneq \tau$) пространства X называется, соответственно, квазibaseй, π -квазibaseй, сильной π -квазibaseй [А. А. Борубаев] отображения f , если для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности

U_x найдутся такое открытое в Y множество O и такое множество $V \in N$, что соответственно выполняются условия А), В) и С).

Если $\tau_f \subseteq \tau$, что квазибаза, π -квазибаза, сильная π -квазибаза отображения f , называется, соответственно, базой [1], π -базой [1] и сильной π -базой отображения f .

Имеет место следующий критерий сети (π -сети) отображения f .

Теорема 1. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ система N подмножеств пространства X является сетью (соответственно π -сетью), тогда и только тогда, когда для любого открытого в X множества U существуют подсистема $N' \subset N$ и система O открытых в Y множеств такие, что $\bigcup(N' \cap f^{-1}O) = U$ (соответственно $\bigcup(N' \cap f^{-1}O) \subset U$), где $N' \cap f^{-1}O = \{n' \cap f^{-1}O' : n' \in N', O' \in O\}$.

Доказательство теоремы 1 в статье «Отображения со второй аксиомой счетности» в этом же сборнике.

Следствие 1. Если система N состоит из открытых подмножеств, то в результате получается критерий базы (π -базы) отображения $f: X \rightarrow Y$.

Теперь определение 1 можно переформулировать следующим образом:

Определение 1'. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ система N (открытых) подмножеств пространства X , называется соответственно, сетью, π -сетью (базой, π -базой), если для любого открытого в X множества U существуют подсистема $N' \subset N$ и система O открытых в Y множеств такие, что $\bigcup(N' \cap f^{-1}O) = U$, $\bigcup(N' \cap f^{-1}O) \subset U$.

Заметим, что все касающееся к π -сети верно и для сильной π -сети, и, это обстоятельство повторять не будем.

Определение 3. Для отображения $f: X \rightarrow Y$, систему P подмножеств пространства X назовем предсетью (соответственно π -предсетью) отображения f , если для всякой точки $x \in X$ и всякой ее

окрестности U_x существуют такой конечный набор $\{V_1, V_2, \dots, V_n\} \subset P$ и такое открытое в Y множество O , что $x \in \bigcap_{i=1}^n V_i \cap f^{-1}O \subset U_x$ (соответственно $\bigcap_{i=1}^n V_i \cap f^{-1}O \subset U_x$).

Предсеть (π -предсеть) отображения f , состоящая из открытых в X множеств, называется предбазой [1] (π -предбазой) отображения f .

Теорема 2. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ система P подмножеств пространства X является предсетью (соответственно π -предсетью) тогда и только тогда, когда всевозможные конечные пересечения элементов P образуют сеть (π -сеть) отображения f .

Доказательство. Пусть P предсеть (π -предсеть) отображения f . Тогда для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U_x существуют такой конечный набор $\{V_1^x, V_2^x, \dots, V_n^x\} \subset P$ и такое открытое в Y множество O_x , что $x \in \bigcap_{i=1}^n V_i^x \cap f^{-1}O_x \subset U_x$ (соответственно $\bigcap_{i=1}^n V_i^x \cap f^{-1}O_x \subset U_x$). Таким образом, система $\{\bigcap_{i=1}^n V_i^x : x \in X\}$ образует сеть (π -сеть) отображения f .

Обратно, пусть всевозможные конечные пересечения элементов $V_1, V_2, \dots, V_n \in P$ образуют сеть (π -сеть) отображения f . Тогда для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U_x существуют такая конечная подсистема $\{V_1^x, V_2^x, \dots, V_n^x\} \subset P$ и такое открытое в Y множество O_x , что $x \in \bigcap_{i=1}^n V_i^x \cap f^{-1}O_x \subset U_x$ (соответственно $\bigcap_{i=1}^n V_i^x \cap f^{-1}O_x \subset U_x$). Отсюда следует, что система P есть предсеть (π -предсеть) отображения f . Теорема доказана.

Следствие 2. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ система P открытых подмножеств пространства X является предбазой (соответственно π -предбазой) тогда и только тогда, когда всевозможные конечные пересечения элементов P образуют базу (π -базу) отображения f .

Определение 4. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ система $\gamma(x)$ (открытых) подмножеств пространства X называется, соответственно (базой, π -базой, сильной π -базой), сетью, π -сетью, сильной π -сетью отображения f в точке $x \in X$, если для каждой окрестности этой точки U_x существуют открытое в Y множество O и такое множество $G \in \gamma(x)$, что выполняется, соответственно, условия А), В) и С) определения 1 и замечания 1.

Следующие предложения доказываются аналогично предыдущим утверждениям.

Предложение 1. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ система $\gamma(x)$ подмножеств пространства X является сетью (π -сетью) отображения f в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности U_x точки x существуют подсистема $\gamma'(x) \subset \gamma(x)$ и система O открытых в Y множеств такие, что $\bigcup(\gamma'(x) \cap f^{-1}O) = U_x$ ($\bigcup(\gamma'(x) \cap f^{-1}O) \subset U_x$), где $\gamma'(x) \cap f^{-1}O = \{G' \cap f^{-1}O' : G' \in \gamma'(x), O' \in O\}$.

Определение 5. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ система $P(x)$ подмножеств пространства X называется предсетью (π -предсетью) отображения f в точке $x \in X$, если для всякой ее окрестности U_x существуют такой конечный набор $\{G_1, G_2, \dots, G_n\} \subset P_x$ и такое открытое в Y множество O , что $x \in \bigcap_{i=1}^n G_i \cap f^{-1}O \subset U_x$ ($\bigcap_{i=1}^n G_i \cap f^{-1}O \subset U_x$).

Предложение 2. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ система $P(x)$ подмножеств пространства X является предсетью (π -предсетью) отображения f в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда всевозможные конечные пересечения элементов $P(x)$ образуют сеть (π -сеть) отображения f в точке x .

Определение 6. Сеть (π -сеть), предсеть (π -предсеть) отображения f в точке $x \in X$ состоящие из открытых в X множеств называются базой (π -базой), предбазой (π -предбазой) отображения f в точке x

Следствие 3. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ система $\gamma(x)$ открытых подмножеств пространства X является базой (π -базой) в точке x тогда и только тогда, когда для любой окрестности U_x точки $x \in X$ существуют подсистема $\gamma'(x) \subset \gamma(x)$ и система O открытых в Y множеств такие, что $\bigcup(\gamma'(x) \cap f^{-1}O) = U_x$ ($\bigcup(\gamma'(x) \cap f^{-1}O) \subset U_x$).

Следствие 4. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ система $P(x)$ открытых подмножеств пространства X является предбазой (π -предбазой) отображения f в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда всевозможные конечные пересечения элементов $P(x)$ образуют базу (π -базу) отображения f в точке x .

Стандартным образом доказывается следующее утверждение.

Предложение 3. Если B – база (π -база) отображения $f: X \rightarrow Y$, то семейство $B(x)$, состоящее из всех элементов B , содержащих точку x , есть база (π -база) $B(x)$ отображения f в этой точке, то объединение $B = \bigcup_{x \in X} B(x)$ есть база (π -база) отображения f .

Заметим, что предложение 3 верно и для сети (π -сети) отображения f .

Определение 7. Наименьшее из кардинальных чисел, являющихся мощностями сетей (π -сетей) отображения $f: X \rightarrow Y$, называется α -весом (π - α -весом) отображения f и обозначаются через $\alpha(f)$ ($\pi\alpha(f)$).

Если сеть (π -сеть) отображения f состоит из открытых множеств, то получим вес [1] (π -вес) отображения f обозначаемое через $\omega(f)$ [1] ($\pi\omega(f)$).

Далее рассуждения будем вести для баз отображения f и для баз отображения f в точке x , однако они имеют силу и для других понятий, рассмотренных выше.

Определение 8. Характером точки $x \in X$ отображения $f: X \rightarrow Y$ называется наименьшее кардинальное число вида $|B(x)|$, где $B(x)$ база отображения f в точке x .

Это кардинальное число обозначается $\chi_x(f)$.

Определение 9. Характером отображения $f: X \rightarrow Y$ называется точная верхняя грань всех кардинальных чисел $\chi_x(f)$ для $x \in X$. Это кардинальное число обозначается $\chi(f)$.

Определение 10. Если $\chi(f) \leq \aleph_0$, то говорят, что отображение f удовлетворяет первой аксиоме счетности (или отображение f есть отображение с первой аксиомой счетности или отображение с точечной счетной базой). Это означает, что в каждой точке $x \in X$ существует счетная база отображения f .

Если $\omega(f) \leq \aleph_0$, то говорят, что отображение $f: X \rightarrow Y$ удовлетворяет второй аксиоме счетности (или отображение f есть отображение со второй аксиомой счетности). Это означает, что отображение f имеет счетную базу.

Предложение 4. Если отображение $f: X \rightarrow Y$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно и по-прежнему удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Доказательство. Пусть B - счетная база отображения f . Тогда $B(x)$, состоящая из всех тех множеств этой базы, которые содержат точку x , очевидно, образует счетную базу в точке x .

Предложение 5. Если $f: X \rightarrow Y$ отображение, а $g: X_0 \rightarrow Y$, где $X_0 \subseteq X$, любое его подотображение, то $\omega(g) \leq \omega(f)$ и $\chi_x(g) \leq \chi_x(f)$ для любой точки $x \in X$.

Отсюда, в частности, следует, что как первая, так и вторая аксиомы счетности выражают наследственные свойства отображения.

Теорема 3. Если вес отображения $f: X \rightarrow Y$ равен τ , то всякая база B отображения f содержит подмножество B' мощности τ , также являющееся базой отображения f .

Доказательство. Пусть B_0 база отображения f имеющая мощность $\tau = \omega(f)$. Обозначим через U элемент базы B_0 . Пусть B - произвольная база отображения f . Нам нужно выделить из базы B базу $B' \subseteq B$, имеющую мощность τ .

Назовем какую-нибудь пару (U_α, U_β) элементов базы B_0 отмеченной, если существует хотя бы одно $V \in B$ удовлетворяющее

$$\text{условию } U_\alpha \cap f^{-1}O_\alpha \subseteq V \cap f^{-1}O_V \subseteq U_\beta \cap f^{-1}O_\beta, \quad (1)$$

где O_α, O_V, O_β - некоторые открытые в Y множества.

Ясно, что множество всех отмеченных пар имеет мощность не большую, чем мощность всех вообще пар базы B_0 , т.е. мощность $\leq \tau$ ($\tau \times \tau = \tau$).

Для каждой отмеченной пары (U_α, U_β) выберем по одному элементу $V \in B$, удовлетворяющему условию (1). Множество B' отмеченных таким образом элементов V базы B также имеет мощность $\leq \tau$. Поэтому остается показать, что множество B' есть база отображения f .

Итак, пусть даны точка $x \in X$ и ее окрестность U_x . Требуется найти такой элемент $V' \in B'$ и такое открытое в Y множество $O_{V'}$, что

$$x \in V' \cap f^{-1}O_{V'} \subset U_x \quad (2).$$

Так как B_0 - база отображения f , то существует такое $U_\beta \in B_0$ и открытое в Y множество O_β , что $x \in U_\beta \cap f^{-1}O_\beta \subset U_x$.

Но базой является и B , поэтому существуют $V \in B$ и такое открытое в Y множество O_V , что $x \in V \cap f^{-1}O_V \subseteq U_\beta \cap f^{-1}O_\beta$.

Наконец, можно найти такое $U_\alpha \in B_o$ и такое открытое в Y множество O_α , что $x \in U_\alpha \cap f^{-1}O_\alpha \subset V \cap f^{-1}O_V$.

Отсюда следует, что пара (U_α, U_β) отмеченная; поэтому существует $V' \in B'$ и такое открытое в Y множество $O_{V'}$, что $U_\alpha \cap f^{-1}O_\alpha \subset V' \cap f^{-1}O_{V'} \subset U_\beta \cap f^{-1}O_\beta$ и тем более условию (2). Теорема доказана.

Когда пространство $Y = \{y\}$ - одноточечное, из теоремы 3 следует важная теорема Александрова- Урысона, касающаяся баз и веса пространства X [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Пасынков. О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств. Отображения и функторы. Сборник. Москва, Изд-во МГУ, 1984.
2. П. С. Александров, Б. А. Пасынков. Введение в теорию размерности. Изд. «Наука», Москва, 1973.