

УПРАВЛЕНИЕ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ В ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Аширбаев Б.Ы., Осмонканов А.М., Тюменбаева А.Н.

КГТУ им. И.Раззакова, КГУСТА им Н.Исанова,
Бишкекский колледж компьютерных технологий.

В статье изложен способ разделения движений дискретной стационарной управляемой системы с малым шагом. Эквивалентная система, полученная при полном разделении переменных состояния, обладает всеми свойствами исходной системы. Она состоит двух подсистем меньшего порядка, решение которых находится независимо, причем они связаны только управляющей функцией.

На основе методов разделения движений и момента построен алгоритм решений дискретной задачи оптимального управления.

Пусть управляемый процесс описывается разностным уравнением

$$y(k+1) = Ay(k) + Bu(k) \quad (1)$$

с начальным условием

$$y(0) = y_0, \quad (2)$$

где $y = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, $A_i (i = \overline{1,4}) - (n \times n)$, $B_1, B_2 - (n \times r)$ – постоянные матрицы, $u = u(k) - r$ – мерный вектор управления, $k = 0, 1, \dots, M$.

Требуется найти управление $u=u(k)$ такое, чтобы соответствующее ему решение задачи (1), (2) удовлетворяло условию

$$y(M) = y_M, \quad (3)$$

где y_M – произвольно выбранный вектор фазового пространства E^n , чтобы при этом функционал

$$J = \sum_{k=0}^{M-1} u'(k)u(k) \quad (4)$$

достигал своего наименьшего возможного значения.

Так как функционал (4) оценивает энергии, затрачиваемой в процессе управления [1], задачу (1)–(4) можно рассмотреть как задачи об управлении с минимальной энергией.

Предположим, что [2]:

I. Матрицы $A_i (i = \overline{1,4})$ являются матрицами простой структуры они не имеют нулевого собственного значения $\lambda_i (i = \overline{1,n})$.

II. Все собственные значения $\lambda_i (i = \overline{1,n})$ матрицы $A_i (i = \overline{1,4})$ удовлетворяют условию $|\lambda_i| < q_0 < 1$.

Прежде чем приступить к нахождению оптимального решения задачи, рассмотрим задачу разделения движений дискретной стационарной управляемой системы (1).

При предположениях I и II введем замену [3]

$$x = \tilde{x} - N\tilde{z}, \quad (5)$$

$$z = \tilde{z} + Hx \quad (6)$$

и соотношения (5), (6) записываем в следующей матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & -N \\ H & E_n - HN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n - NH & N \\ -H & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}. \quad (8)$$

С учетом соотношений (7) уравнение (1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_n & -N \\ H & E_n - HN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}(k+1) \\ \tilde{z}(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & -N \\ H & E_n - HN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u.$$

Последнего уравнения умножая слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} E_n & -N \\ H & E_n - HN \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E_n - NH & N \\ -H & E_n \end{pmatrix}$$

получим

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \tilde{x}(k+1) \\ \tilde{z}(k+1) \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} A_1 + A_2H + N(-HA_1 + A_3 - HA_2H - A_4H) \\ -HA_1 + A_3 - HA_2H + A_4H \end{pmatrix} \\
& - (A_1 + A_2H)N + N(A_4 - HA_2) + A_2 + N(-HA_1 + A_3 - HA_2H + A_4H) \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} E_n - NH & N \\ -H & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u.
\end{aligned} \tag{9}$$

При выполнении условия II матрицы H и N удовлетворяют следующим матричным уравнениям Риккати и Ляпунова соответственно:

$$-HA_1 + A_4H - HA_2H + A_3 = 0, \tag{10}$$

$$-\tilde{A}_1N + N\tilde{A}_4 + A_2 = 0. \tag{11}$$

Доказательство существования и единственности решения уравнения (10), (11) можно найти в [4].

С учетом (10), (11) уравнение (9) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}(k+1) \\ \tilde{z}(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} u, \tag{12}$$

где

$$\tilde{A}_1 = A_1 + A_2H, \quad \tilde{A}_4 = A_4 - HA_2, \quad \tilde{B}_1 = B_1 + N\tilde{B}_2, \quad \tilde{B}_2 = -HB_1 + B_2. \tag{13}$$

В результате имеем утверждения в виде следующей теоремы

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия I, II и матрицы H , N удовлетворяют уравнениям (10) и (11). Тогда систему (1) можно разделить на две подсистемы меньшего порядка вида:

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}_1\tilde{x}(k) + \tilde{B}_1u(k), \tag{14}$$

$$\tilde{z}(k+1) = \tilde{A}_4\tilde{z}(k) + \tilde{B}_2u(k), \tag{15}$$

причем эти уравнения связаны только по управлению $u(t)$.

Теперь рассмотрим задачу «управления с минимальной энергией» с уравнениями (14), (15) и граничными условиями:

$$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0, \tag{16}$$

$$\tilde{x}(M) = \tilde{x}_M, \quad \tilde{z}(M) = \tilde{z}_M, \tag{17}$$

где $\tilde{x}_0 = x_0 + N\tilde{z}_0$, $\tilde{z}_0 = z_0 - Hx_0$, $\tilde{x}_M = x_M + N\tilde{z}_M$, $\tilde{z}_M = z_M - Hx_M$.

Качества процесса задачи (14) – (17) оценивается функционалом (4).

Решения уравнения (14), (15) с начальными условиями (16) можно представить в виде:

$$\tilde{x}(k) = \tilde{A}_1^k \tilde{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}_1^{k-i-1} \tilde{B}_1 u(i), \quad (18)$$

$$\tilde{z}(k) = \tilde{A}_4^k \tilde{z}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}_4^{k-i-1} \tilde{B}_2 u(i). \quad (19)$$

Из условия (17) следует, что искомое управление должно удовлетворять соотношениям:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}_1^{M-i-1} \tilde{B}_1 u(i) = \alpha_M^1, \quad (20)$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}_4^{M-i-1} \tilde{B}_2 u(i) = \alpha_M^2,$$

$$\text{где } \alpha_M^1 = \tilde{x}_M - \tilde{A}_1^M \tilde{x}_0, \alpha_M^2 = \tilde{z}_M - \tilde{A}_4^M \tilde{z}_0.$$

Управление $u^* = u^*(k)$ удовлетворяющее соотношениям (20) и доставляющие минимум функционалу (4), может быть представлено в виде [5]

$$u^*(i) = \tilde{B}_1' (\tilde{A}_1^{M-i-1})' \cdot C_1 + \tilde{B}_2' (\tilde{A}_4^{M-i-1})' \cdot C_2, \quad i = \overline{0, M-1}. \quad (21)$$

Здесь коэффициенты C_1 и C_2 определяются из уравнений

$$\alpha_M = W \cdot C, \quad (22)$$

где

$$\alpha_M = \begin{pmatrix} \alpha_M^1 \\ \alpha_M^2 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$W_1 = \sum_{i=0}^{M-1} \tilde{A}_1^{M-i-1} \tilde{B}_1 \tilde{B}_1' (\tilde{A}_1^{M-i-1})',$$

$$W_2 = \sum_{i=0}^{M-1} \tilde{A}_1^{M-i-1} \tilde{B}_1 \tilde{B}_2' (\tilde{A}_4^{M-i-1})', W_3 = \sum_{i=0}^{M-1} \tilde{A}_4^{M-i-1} \tilde{B}_2 \tilde{B}_2' (\tilde{A}_4^{M-i-1})'.$$

Из уравнения (22) будем иметь

$$C = W^{-1} \alpha_M, \quad (24)$$

где

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} W_1^{-1} + W_1^{-1} W_2 S^{-1} W_2' W_1^{-1} & -W_1^{-1} W_2 S^{-1} \\ -S^{-1} W_2' W_1^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}, S = W_3 - W_2' W_1^{-1} W_2.$$

В результате сформулируем следующую теорему об «Управлении с минимальной энергией»:

ТЕОРЕМА 2. Если матрица W в (22) имеет полный ранг, то существует управление $u^* = u^*(k)$, которое переводит системы (14) и

(15) из состояния (16) в состояния (17) [6]. Кроме того, если $|W_1| \neq 0$ (или $|W_3| \neq 0$), то оптимальное управление и соответствующие оптимальные траектории задачи (4), (14) - (17) определяются формулами:

$$u^*(k) = \tilde{B}_1'(\tilde{A}_1^{M-k-1})' r_M^1 + \tilde{B}_2'(\tilde{A}_4^{M-k-1})' r_M^2, \quad (25)$$

$$\tilde{x}(k) = \tilde{A}_1^k \tilde{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}_1^{k-i-1} \tilde{B}_1 \left[\tilde{B}_1'(\tilde{A}_1^{M-i-1})' r_M^1 + \tilde{B}_2'(\tilde{A}_4^{M-i-1})' r_M^2 \right],$$

$$\tilde{z}(k) = \tilde{A}_4^k \tilde{z}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}_4^{k-i-1} \tilde{B}_2 \left[\tilde{B}_1'(\tilde{A}_1^{M-i-1})' r_M^1 + \tilde{B}_2'(\tilde{A}_4^{M-i-1})' r_M^2 \right],$$

$$\text{где } r_M^1 = (W_1^{-1} + W_1^{-1} W_2 S^{-1} W_2' W_1^{-1}) \alpha_M^1 - W_1^{-1} W_2 S^{-1} \alpha_M^2,$$

$$r_M^2 = -S^{-1} W_2' W_1^{-1} \alpha_M^1 + S^{-1} \alpha_M^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – Москва: Наука, 1968. – 476 с.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
4. Стрыгин В. В., Соболев В. А. Разделение движений методом интегральных многообразий. – Москва: Наука. 1988. - 256 с.
5. А.И.Егоров. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. – Москва: Физматлит, 2005. – 384 с.
6. Иманалиев.З.К., Аширбаев Б.Ы., Алымбаева Ж.А. Решение дискретной задачи оптимального управления с малым шагом //Междунар. научно-информац. журн. «Наука и инновации». Вып. №1, Бишкек, 2013. с. 35 – 41.
7. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. - Москва: Наука, 1976.- 424 с.