

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНОЙ МАТРИЦЫ ДИСКРЕТНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Осмонканов А.М., Тюменбаева А.Н.

Кыргызский государственный университет строительства,
транспорта и архитектуры им.Н.Исанова.
Бишкекский колледж компьютерных технологий.

В данной статье предложен способ построения переходной матрицы дискретной управляемой системы. Рассмотрен пример построения переходной матрицы стационарной дискретной управляемой системы.

Пусть объект управления описывается разностным уравнением

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (1)$$

где x – n – мерный вектор состояния, u – r – мерный вектор управления, $A(k)$, $B(k)$ – матрицы размера $(n \times n)$, $(n \times r)$ соответственно, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Начальное состояние системы (1) задано

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

При $u(k)=0$ находим решение однородного уравнение

$$x(k+1) = A(k)x(k). \quad (3)$$

Ее общее решение имеет вид

$$x_{oo}(k) = \psi(k) \cdot C = \sum_{i=1}^n C_i \psi_i(k), \quad (4)$$

где $C_1, \dots, C_n$ – произвольные постоянные, $\psi(k) – (n \times n)$ – фундаментальная матрица составленная из линейно независимых решений $\psi_i(k) = (\psi_{1i}(k), \dots, \psi_{ni}(k))^T, i = 1, \dots, n$ системы (3) т.е. справедлива равенства

$$\psi(k+1) = A(k)\psi(k). \quad (5)$$

Общее решение уравнение (1) ищем в виде

$$x(k) = \psi(k) \cdot C \quad (6)$$

где $C(k) = (C_1(k), \dots, C_n(k))^T$ – неизвестные функции подлежащих определению.

Подставим (5) в уравнение (1)

$$\psi(k+1)C(k+1) = A(k)\psi(k) \cdot C(k) + B(k)u(k).$$

Вычитая из обеих частей последнего уравнения $\psi(k+1)C(k)$ с учетом (5) получаем

$$\psi(k+1)\Delta C(k) = B(k)u(k) \quad (7)$$

где $\Delta C(k) = C(k+1) - C(k)$.

Из (7) имеем

$$\Delta C(k) = \psi^{-1}(k+1)B(k)u(k). \quad (8)$$

Выпишем соотношение (8) при $k = 0, 1, \dots, N$:

$$C(1) - C(0) = \psi^{-1}(1)B(0)u(0),$$

$$C(2) - C(1) = \psi^{-1}(2)B(1)u(1),$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots,$$

$$C(N) - C(N-1) = \psi^{-1}(N)B(N-1)u(N-1)$$

и суммируя получаем

$$C(k) = C(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \psi^{-1}(j+1)B(j)u(j). \quad (9)$$

Тогда

$$x(k) = \psi(k)C(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \psi(j+1)\psi^{-1}(j+1)B(j)u(j). \quad (10)$$

При $k = 0$ $x(0) = \psi(0)C(0) = x_0$, поэтому $C(0) = \psi^{-1}(0)x_0$, тогда из (10) получаем

$$x(k) = \psi(k)\psi^{-1}(0)x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \psi(j+1)\psi^{-1}(j+1)B(j)u(j). \quad (11)$$

Теперь переходим построению переходной матрицы системы (1).

Известно [1], что переходную матрицу можно представить в виде

$$\Psi(k, j+1) = \psi(k)\psi^{-1}(j+1), \quad (12)$$

тогда решение (11) можно записать в виде

$$x(k) = \Psi(k, 0)x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Psi(k, j+1)B(j)u(j). \quad (13)$$

где $\Psi(k, 0)$ – переходная матрица однородной системы (3) определяемый формулой (12).

Для стационарной системы

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

решение (13) имеет вид

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} Bu(j), \quad (15)$$

где $\Psi(k) = A^k$ – переходная матрица системы (14).

Для построения переходной матрицы $\Psi(k) = A^k$ можно вычислить, непосредственно умножая матрицу A на A необходимое число раз. Однако такой путь эффективен лишь при небольших значениях k . Если же k может принимать большие значения можно воспользоваться теоремой Кели-Гамильтона о том, что характеристический многочлен матрицы является ее аннулирующим многочленом [2].

Разделив λ^k на характеристический многочлен $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ матрицы A , получаем

$$\lambda^k = P(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda), \quad (16)$$

где $Q(\lambda)$ -частное, $R(\lambda)$ – остаток, причем остаток – это многочлен степени меньше, чем размерность n матрицы A , имеющий вид

$$R(\lambda) = r_{n-1}\lambda^{n-1} + r_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + r_1\lambda + r_0 \quad (17)$$

Подставив в (16) вместо λ матрицу A получаем

$$A^k = R(A), \quad (18)$$

так как по теореме Кели-Гамильтона $P(A)=0$.

В случае простых различных корней характеристического уравнения, подставляя корни λ_i в (16), с учетом $P(\lambda_i) = 0$ получаем

$$\lambda_i^k = R(\lambda_i) = r_{n-1}\lambda_i^{n-1} + r_{n-2}\lambda_i^{n-2} + \dots + r_1\lambda_i + r_0, \quad i = 1, \dots, n \quad (19)$$

Если λ_i - действительный корень характеристического уравнения кратности μ , то, учитывая, что

$$P(\lambda_i) = 0, \quad P'(\lambda_i) = 0, \dots, P^{(\mu-1)}(\lambda_i) = 0,$$

из (16), последовательно дифференцируя, получаем

$$\left. \frac{d^j}{d\lambda^j} \lambda^k \right|_{\lambda=\lambda_i} = \left(\frac{d^j}{d\lambda^j} R(\lambda) \right) \Big|_{\lambda=\lambda_i}, j=0,1,\dots,\mu-1. \quad (20)$$

Это система μ линейных уравнений относительно коэффициентов $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ многочлена $R(\lambda)$.

Если $\lambda_{1,2} = a \pm \beta i$ – пара комплексных сопряженных корней кратности μ , то из (20) получаем систему 2μ уравнений, приравнивая действительные и мнимые части.

Таким образом, из (17) следует, что переходная матрица $\Psi(k) = A^k$ линейной стационарной системы (14) имеет вид

$$A^k = r_{n-1}A^{n-1} + \dots + r_1A + r_0E, \quad (21)$$

где коэффициенты $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ многочлена, зависящие от дискретного времени k , находятся из (19), (20).

Пример. Найти переходную матрицу системы:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) - x_2(k) + u(k), \\ x_2(k+1) &= -2x_1(k) - u(k) \end{aligned} \quad (22)$$

при начальных условиях $x_1(0) = 3, x_2(0) = 0$.

Уравнения(22) имеет вид (1) с матрицами

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение для матрицы A :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Оно имеет два простых корня $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 2$ (кратность $\mu=1$).

Поскольку $n=2$, то согласно (17) имеем

$$R(\lambda) = r_1\lambda + r_0.$$

Записывая для каждого корня равенство (19), получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными r_0, r_1 :

$$\begin{aligned} -r_1 + r_0 &= (-1)^k, \\ 2r_1 + r_0 &= 2^k. \end{aligned}$$

Отсюда находим коэффициенты

$$r_0 = \frac{1}{3}(2^k + 2 \cdot (-1)^k), \quad r_1 = \frac{1}{3}(2^k - (-1)^k).$$

Из равенства (21) определяем переходную матрицу

$$\Psi(k) = r_1 A + r_0 E = \frac{1}{3}(2^k - (-1)^k) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(2^k + 2 \cdot (-1)^k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После упрощений получаем

$$\Psi(k) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{k+1} + (-1)^k & -2^k + (-1)^k \\ -2^{k+1} + 2 \cdot (-1)^k & 2^k + 2 \cdot (-1)^k \end{pmatrix}.$$

Используя переходную матрицу, запишем формулу (13) для $x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$x(k) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{k+1} + (-1)^k & -2^k + (-1)^k \\ -2^{k+1} + 2 \cdot (-1)^k & 2^k + 2 \cdot (-1)^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{k-j} + (-1)^{k-j-1} & -2^{k-j-1} + (-1)^{k-j-1} \\ -2^{k-j} + 2 \cdot (-1)^{k-j-1} & 2^{k-j-1} + 2 \cdot (-1)^{k-j-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u(k)$$

Отсюда

$$x(k) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^k & (-1)^k \\ -2 \cdot 2^k & 2 \cdot (-1)^k \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{k-1} \begin{pmatrix} 2^{k-j-1} \\ -2^{k-j-1} \end{pmatrix} u(k).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Портер У. Современное основание общей теории систем. Москва: Наука, 1971.- 556 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1988.- 552 с.