

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СЕЛЕВЫХ И ОПОЛЗНЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Бийбосунов А.И., Туганбаев У.М., Жусупбекова С.Т.

КНУ им. Ж.Баласагына, КНАУ им. К.Скрябина

На основе фундаментальных принципов механики сплошных сред может быть исследована динамика движения селевых и оползневых течений. При этом, в качестве инструмента исследования данного процесса выдвигаются методы моделирования. Необходимость использования метода математического моделирования определяется тем фактом, что многие процессы, явления, объекты непосредственно исследовать их невозможно, или же эти исследования требуют больших временных и материальных затрат.

Исследование селевых и оползневых процессов математическими методами в последние годы находит все более широкое применение при решении прогнозных задач и разработки защитных мероприятий. Математический аппарат предоставляет возможность решать проблему долговременного регионального прогноза, а также локальные прогнозные задачи, в которых селевые и оползневые процессы рассматриваются как движение сплошной среды, где ключевым фактором выступает вязкость.

Рассмотрим модель механики сплошной среды в виде жидкости и твердой частицы, обладающими свойствами непрерывности в смысле распределения массы и легкой подвижности. На основе этих

свойств установим основные уравнения динамики жидкости, а также физические области их применения при различных допущениях и упрощениях.

Приведем основные уравнения движения динамики вязкой жидкости:

а) уравнение состояния, связывающее давление P , плотность ρ , температуру T рассматриваемой жидкости, которое в общем виде запишется:

$$P = F(\rho, T) \quad (1)$$

где T - абсолютная температура в данной точке.

б) Уравнение неразрывности в трехмерных декартовых координатах имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Если рассматриваемый процесс происходит на плоскости или в осесимметричном пространстве, тогда уравнение неразрывности, или иногда его называют уравнением сохранения массы, имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \delta \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

где $\delta = 0$ - для двумерного случая и $\delta = 1$ для осесимметричного случая.

Для одномерного движения уравнение неразрывности будет иметь следующую форму:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

в) уравнения движения вязкой жидкости

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} W \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right], \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} W \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} W \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если жидкость несжимаемая, тогда $\operatorname{div} \vec{W} = 0$ и уравнение (5) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Таким образом, уравнение неразрывности и уравнение движения для несжимаемой жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= F_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= F_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= F_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Если массовые силы рассматривать как заданные, тогда остаются четыре неизвестные величины U , V , W , P и для их

определения имеем четыре уравнения (7) и (8). Однако, необходимо отметить, что до настоящего времени вследствие больших математических трудностей не получено ни одного общего решения уравнений Навье – Стокса в их полном виде, т.е. с сохранением всех конвективных членов и всех членов, учитывающих вязкость. Но, вместе с тем, имеются некоторые частные решения, например, для ламинарного течения в трубе или для течения в пограничном слое и эти частные решения столь хорошо совпадают с экспериментальными результатами, что вряд ли можно сомневаться в общей применимости уравнений Навье – Стокса. Следует отметить, что уравнения Навье – Стокса отличаются от уравнений Эйлера для движения жидкости без трения членом $\mu \Delta W$, учитывающего вязкость.

В криволинейной ортогональной системе координат уравнения Навье – Стокса (7) и (8) могут быть записаны в безразмерной форме в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1-Ky} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{Kv}{1-Ky} = 0 \\
& \frac{u}{1-Ky} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{Kuv}{1-Ky} + \frac{1}{1-Ky} \frac{\partial P}{\partial x} = \\
& = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{(1-Ky)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{K}{1-Ky} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2K}{(1-Ky)^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{K^2 u}{(1-Ky)^2} \right] \\
& \frac{u}{1-Ky} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{Ku^2}{1-Ky} + \frac{\partial P}{\partial y} = \\
& = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{(1-Ky)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{K}{1-Ky} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2K}{(1-Ky)^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{K^2 v}{(1-Ky)^2} \right] \\
& \frac{u}{1-Ky} \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} = \\
& = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{(1-Ky)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{K}{1-Ky} \frac{\partial w}{\partial y} \right]
\end{aligned} \tag{10}$$

Координаты X, Y, Z отнесены к L , компоненты скорости U, V, W (вдоль осей координат X, Y, Z соответственно) – к U_∞ , давление P – отнесено к ρU_∞^2 (где ρ - плотность жидкости).

В дальнейшем используются только безразмерные переменные (независимые и искомые).

Предполагается, что кривизна вогнутой поверхности:

$$K = L/R = \varepsilon K < 1, \quad K \sim O(1), \quad \varepsilon < \varepsilon < 1$$

т.е. рассматриваются такие течения, когда число Гертлера велико:

$$G_e = 2 Re^{1/2} L/R \sim O(\varepsilon/\varepsilon) > 1$$

Пусть « a », « b » и « c » - характерные толщина, протяженность и ширина пространственной возмущенной вихревой области течения. Очевидно, эти величины должны быть больше характерной длины свободного пробега молекул жидкости $O(\varepsilon^2)$, иначе для исследования течения в областях с характерными размерами:

На основе данных допущений и предположений выполняется нелинейный асимптотический анализ уравнений Навье-Стокса для случая гидродинамической неустойчивости течения в поле центробежных сил при больших значениях чисел Рейнольдса и Гертлера. Формулируются краевые задачи гидродинамики применительно к оползневым и селевым течениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial \vartheta}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial Z} &= 0 \\ Y \frac{\partial U}{\partial X} + \vartheta &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right) \\ Y \frac{\partial \vartheta}{\partial X} + 2YU + \frac{\partial \rho}{\partial Y} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial Z^2} \right) \\ Y \frac{\partial w}{\partial X} + \frac{\partial \rho}{\partial Z} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Z^2} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

с соответствующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned}
 U = \vartheta = W = 0, \quad Y = 0 \\
 U, \vartheta, W, \rho \rightarrow 0, \quad X \rightarrow -\infty, \quad X \rightarrow \infty \quad (11a) \\
 U, \vartheta, W, \quad \rho(X, Y, Z) = U, \vartheta, W, \quad \rho(X, Y, Z + 2\pi)
 \end{aligned}$$

Решением краевой задачи (11) – (11a) являются собственные функции U , V , W , и P не равные тождественно нулю и тривиальным краевым условиям. Будем использовать обычное для них представление:

$$\begin{aligned}
 U &= \exp(\beta X) U_1(Y) \cos Z, & \vartheta &= \exp(\beta X) \vartheta_1(Y) \cos Z \\
 w &= \exp(\beta X) w_1(Y) \sin Z, & \rho &= \exp(\beta X) \rho_1(Y) \cos Z \quad (12)
 \end{aligned}$$

Тогда уравнения (11) – (11a) могут быть сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

При этом в нелинейном приближении численно получены распределения компонент скорости по координате, зависимость местного числа Рейнольдса от инкремента роста амплитуды вихрей для первых трех основных вихревых мод.

Таким образом, это позволяет исследовать проблемы перехода ламинарных течений к турбулентным потокам и развития вихрей Гертлера, возникающих в оползневых и селевых течениях. Данные решения могут найти также теоретическое и практическое применение в таких областях, как судостроение, в межлопаточных каналах и гидравлических процессах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Изучение режима оползневых процессов / под ред. А.И. Шеко. - М.: Изд. Недра, 1982. – 412 с.
2. Варнес Д. Движение склонов, типы и процессы // Оползни, исследования и укрепления. - М.: Изд. Мир, 1981. – С. 32-85.
3. Бийбосунов А.И., Основы оползневых процессов в Кыргызстане и их классификация // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2006. №3. – С. 50-52.