

ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВОВ ГОРНЫХ ПОРОД С ОСТАТОЧНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Аманалиев А.А., ИГиОН НАН КР

Происходящие в горных районах катастрофические процессы, опасные для ведения горного производства и жизни людей, указывает на необходимость внимательного изучения неоднородностей естественного напряженного состояния, обусловленных природными условиями образования и последующими процессами формирования на разных этапах геологической истории структур массивов горных пород. При разработке месторождений, строительстве и эксплуатации геотехнических объектов актуальной геомеханической проблемой является выявление очагов формирующихся горных ударов и техногенных землетрясений. Для прогноза и предупреждения этих явлений, в формировании которых при определенных условиях значительную роль играют и остаточные напряжения [1], важно знание напряженно-деформированного состояния прилегающего массива горных пород. Поэтому, задача о напряженном состоянии слоистого массива пород с гористым рельефом и остаточными напряжениями вокруг подземных выработок (полостей), находящейся в условиях совместного действия гравитационных, горизонтальных тектонических и сейсмических сил, а также внутреннего напора является актуальной задачей геомеханики и формулируется в следующей постановке.

Анизотропные массивы равнин, ограниченные горизонтальной дневной поверхностью $y=0$, испытывают действие объемных сил с

горизонтальной $(-\gamma K_c \sin \delta)$ и вертикальной $(-\gamma + \gamma K_c \cos \delta)$ составляющими, а также тектонических сил растяжения-сжатия в горизонтальном направлении, параллельно оси ОХ с постоянной интенсивностью T_x по глубине полупространства $y < 0$.

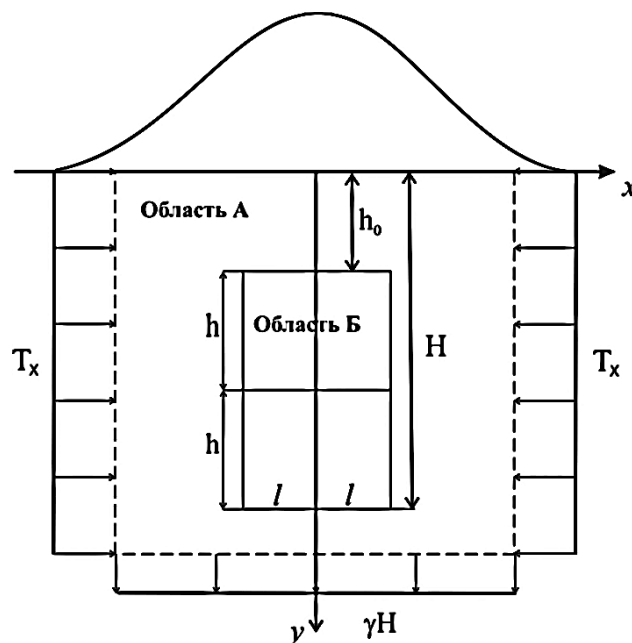


Рис. Схема к моделированию напряженного состояния массива пород с гористым рельефом

В таком полупространстве имеется гора или впадина, ограниченная криволинейной цилиндрической поверхностью, форма которой изображает гористый рельеф. Образующая этой поверхности параллельна оси ОZ и проходит по простиранию плоскости изотропии массива, где ось ОХ — горизонтальная, ОУ — вертикальная. Плоскость изотропии ориентирована произвольно и составляет с горизонтальной плоскостью угол α .

В этой области А на глубине h_0 имеется прямоугольная подобласть (область Б) с остаточными напряжениями, нижняя граница которой располагается на глубине H от дневной поверхности массива, а левая и правая границы расположены на расстоянии l от центра данной области Б.

В зоне влияния горы проведена подземная выработка. Направления образующих поверхности горы (каньона) и выработки параллельны. На контуре выработки может быть приложен гидростатический напор q_0 . Требуется определить напряженное состояние массивов пород вокруг такой выработки.

Общее поле напряжений данной задачи выразим в виде суммы полей напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x^{\Pi} + \sigma_x^P + \sigma_x^O + \sigma_x^C + \sigma_x^B + \sigma_x^H, \\ \sigma_y &= \sigma_y^{\Pi} + \sigma_y^P + \sigma_y^O + \sigma_y^C + \sigma_y^B + \sigma_y^H, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^{\Pi} + \tau_{xy}^P + \tau_{xy}^O + \tau_{xy}^C + \tau_{xy}^B + \tau_{xy}^H, \\ \sigma_z &= -a_{33}(a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{36}\tau_{xy}).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь напряжения с индексом "п" сверху обозначают поле напряжений анизотропного полупространства ($y \leq 0$), которое возникает при совместном действии гравитационных (G), сейсмических (K_c) и тектонических (T_x) сил; напряжения с индексами "р" характеризуют поле напряжений, которое возникает в результате влияния горного рельефа массивов пород на напряженное состояние массивов пород полупространства; напряжения с индексом "о", характеризуют распределение остаточных напряжений в области Б, напряжения с индексом "с" характеризуют напряжения, возникающие при прохождении сейсмических волн растяжения-сжатия и сдвига; напряжения с индексом "в" характеризуют образование выработки в зоне влияния горы; напряжения с индексом "н" возникают вокруг выработки от давления напора.

Аналитическое решение задачи (1) для изотропного /2/ и анизотропного/2/ упругого полупространства с гористым рельефом до и после образования выработки, при отсутствии остаточных напряжений, подробно изложены, соответственно, в работах/2, 3/. В работе /4/ предлагается методика решения задачи (1) без остаточных напряжений, где на основе разработанного аналитического метода /3/, описываются начальное напряженное состояние массива пород с гористым рельефом и анизотропными упругими свойствами в условиях совместного действия гравитационных, горизонтальных тектонических и сейсмических инерционных сил. Далее, численным методом

рассчитывается напряженное состояние массивов пород вокруг подземных выработок.

В настоящее время не разработаны подходы к решению задач по определению напряженного состояния массивов горных пород с остаточными напряжениями. В этом случае, общее решение задачи (1) требует знание взаимодействия остаточных напряжений с общим полем естественного напряженного состояния (гравитация, тектоника, рельефа, неоднородностей массива и т.д.) и влияние техногенных (система разработки месторождения, технология горных работ и т.д.) факторов на напряженное состояние массивов горных пород с остаточными напряжениями.

Для разработки методических основ решения задачи (1) необходимо предельно решить более идеализированную задачу, где исследуемая область представлена, как изотропная и однородная упругая область с прямолинейным контуром при взаимодействии остаточных напряжений с гравитационными и горизонтальными тектоническими силами. Решение данной задачи необходимо для выявления закономерностей взаимодействия остаточных напряжений с основными природными силами, действующих в массиве горных пород, при отсутствии геомеханических факторов, искажающих распределение остаточных напряжений.

Напряженное состояние для данной задачи, исходя из соотношений (1), представим в виде суммы двух полей напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x^{\Pi} + \sigma_x^O, \\ \sigma_y &= \sigma_y^{\Pi} + \sigma_y^O, \tau_{xy} = \tau_{xy}^{\Pi} + \tau_{xy}^O,\end{aligned}\quad (2)$$

где напряжения σ_x^{Π} , σ_y^{Π} и τ_{xy}^{Π} на основе гипотезы Динника представляются соотношениями [2]

$$\sigma_x^{\Pi} = T_x + \lambda \gamma y; \sigma_y^{\Pi} = \gamma y; \tau_{xy}^{\Pi} = 0, \quad (3)$$

где $\lambda = \nu / (1 - \nu)$ – коэффициент бокового распора для породы массива.

При решении задач плоской теории упругости методом сил, вводится функция напряжений $F(x,y)$, которая должна удовлетворять уравнениям равновесия /5/

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g &= 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Распределение остаточных напряжений в области Б, выражаются через частные производные функции напряжений F соотношениями

$$\begin{aligned}\sigma_x^o &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \sigma_y^o = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tau_{xy}^o \\ &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (5)$$

Вне этой области они равны нулю.

При отсутствии объемных сил основные уравнения теории упругости приводятся к бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0, \quad (6)$$

а уравнения равновесия (4) принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x^o}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^o}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_x^o}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}^o}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Граничные условия получаются из соотношений

$$\begin{aligned}l\sigma_x + m\tau_{xy} &= \bar{X}, m\sigma_y + l\tau_{xy} \\ &= \bar{Y},\end{aligned}\quad (8)$$

где l, m – направляющие косинусы.

Поэтому, напряженное состояние области А с учетом вышесказанного представим следующим образом:

а) в области Б

$$\sigma_x = T_x + \lambda \gamma y + \sigma_x^o; \quad \sigma_y = \gamma y + \sigma_y^o; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^o, \quad (9)$$

б) вне области Б представлена соотношениями (3).

Из этих условий следует, что за границей Γ_0 области Б остаточные напряжения отсутствуют. Тогда из граничных условий (8) получаем

$$\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = 0, \quad \text{при } |x| > \Gamma_0 \text{ и } |y| > \Gamma_0. \quad (10)$$

На границе же области А нормаль направлена параллельно оси y , тогда из (8) получаем, что $l=0$ и $m=\pm 1$, следовательно

$$\bar{X} = \pm \tau_{xy}, \quad \bar{Y} = \pm \sigma_y. \quad (11)$$

Если направление нормали совпадает с направлениями осей y , то в (11) берутся значения с положительными знаками, в противном случае берутся значения с отрицательными знаками.

Решение упругой плоской задачи (3), (5) и (9), таким образом, сводится к отысканию решения уравнения (6), удовлетворяющей уравнениям равновесия (7), с граничными условиями (10) и (11).

Так как, соотношения (2) – (11) не содержат упругих констант, описывающих свойства материала, то эти уравнения могут быть применены и при решении задач, сформулированных аналогично (9) для плоских модельных образцов, если выбрать только прямоугольную подобласть Б, а соотношения (9) переписать в виде:

$$\sigma_x = P_1(x, y) + \sigma_x^0, \quad \sigma_y = P_2(x, y) + \sigma_y^0, \\ \tau_{xy} = P_3(x, y) + \tau_{xy}^0, \quad (12)$$

с граничными условиями

$$\sigma_x = P_x + \sigma_x^0, \quad \sigma_y = P_y + \sigma_y^0, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0, \quad \text{при } x \in \Gamma_0 \text{ и } y \in \Gamma_0 \quad (13)$$

где P_x и P_y – вертикальная и горизонтальная нагрузки, равномерно распределенные, соответственно, на горизонтальной и вертикальной границах исследуемого образца.

В зависимости от знаков P_x и P_y и равенству нулю одного из нагрузок следуют варианты задач сжатия и/или растяжения вдоль

одного или двух осей образца. При $P_x = P_y = 0$ в (13) получаем задачу о распределении остаточных напряжений без действия внешних сил.

Результаты, полученные для образцов, мы не можем перенести непосредственно на массив. Моделирование напряженного состояния образцов необходимо для выявления общих зависимостей и закономерностей проявлений остаточных напряжений без влияния внешних факторов или действия определенных подобранных факторов.

Таким образом, для решения задачи (1) необходимо последовательное решение следующих задач по этапам. Сначала необходимо решить задачу (12) с граничными условиями $P_x = P_y = 0$, а затем с условиями (13) для модельных образцов. На следующем этапе аналогично решается задача (3) для массива.

В работе [6] предлагается разработанная методика расчета напряженного состояния образца с остаточными напряжениями, когда известны напряжения по сечениям: горизонтальном $y(y=y_0)$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= S_{n1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x), \\ \sigma_y &= S_{n2}(x) = \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\bar{a}_k \cos k\omega x + \bar{b}_k \sin k\omega x), \\ \tau_{xy} &= S_{n3}(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\tilde{a}_k \cos k\omega x + \tilde{b}_k \sin k\omega x),\end{aligned}\tag{14}$$

и вертикальному ($x=x_0$)

$$\begin{aligned}\sigma_x &= C_{n1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^m (\alpha_j \cos j\omega y + \beta_j \sin j\omega y), \\ \sigma_y &= C_{n2}(x) = \frac{\bar{\alpha}_0}{2} + \sum_{j=1}^m (\bar{\alpha}_j \cos j\omega y + \bar{\beta}_j \sin j\omega y),\end{aligned}\tag{15}$$

$$\tau_{xy} = C_{n2}(x) = \frac{\tilde{\alpha}_0}{2} + \sum_{j=1}^n (\tilde{\alpha}_j \cos j\omega y + \tilde{\beta}_j \sin j\omega y).$$

Функция напряжений $F(x,y)$ в этом случае может быть выражена через суммы тригонометрических функций аргументов x и y следующего вида:

$$F(x,y) = \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos k\omega x + B_k \sin k\omega x) \right] \times \\ \times \left[\frac{\bar{A}_0}{2} + \sum_{j=1}^m (\bar{A}_j \cos j\omega y + \bar{B}_j \sin j\omega y) \right] + f(x,y) \quad (16)$$

где $f(x,y)$ – полиномы, уточняющие выражения для нормальных компонент напряжений, найденных через функцию напряжений; $A_0, A_k, \bar{A}_0, \bar{A}_k, B_k, \bar{B}_k$ – коэффициенты одинарного ряда вида (14) и (15), определяемые формулой (16).

Решение задачи (12) при условии $P_x = P_y = 0$ имеет вид:

$$\sigma_x = \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x) \right] \times \left[\sum_{j=1}^n (\alpha_j \cos j\omega y + \beta_j \sin j\omega y) \right] \times \frac{1}{C} - \\ - \xi_1 x - \zeta_1 y - v_1, \\ \sigma_y = \left[\sum_{k=1}^n (\bar{a}_k \cos k\omega x + \bar{b}_k \sin k\omega x) \right] \times \left[\frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\bar{\alpha}_j \cos j\omega y + \bar{\beta}_j \sin j\omega y) \right] \times \\ \times \frac{1}{\bar{C}} - \xi_2 x - \zeta_2 y - v_2, \quad (17) \\ \tau_{xy} = \left[\sum_{k=1}^n (\tilde{a}_k \cos k\omega x + \tilde{b}_k \sin k\omega x) \right] \times \left[\sum_{k=1}^n (\tilde{\alpha}_j \cos j\omega y + \tilde{\beta}_j \sin j\omega y) \right] \times \frac{1}{\tilde{C}} - \\ - \xi_3 x - \zeta_3 y - v_3,$$

где $\xi_i, \zeta_i, v_i, i = \overline{1,3}$ – уточняющие выражения для нормальных компонент напряжений на границе тела, а $C, \bar{C}, \tilde{C}$ – значения

соответствующих компонент напряжений в точке пересечений сечений.

Таким образом, может быть определена функция напряжений для остаточных напряжений, а значит и их распределение в некоторой заданной области по экспериментальным данным. В этом случае основной задачей является задача определения коэффициентов Фурье для граничных значений функции, по которым определяются все остальные значения.

Для решения задачи (12) при условии (13) предлагается применить выше изложенный метод расчета по следующей методике. Вычислив, нормальные напряжения до и после нагрузки по формулам (17), определим разность напряжений

$$\begin{aligned}\sigma'_x &= \sigma_x^H - \sigma_x^O, & \sigma'_y &= \sigma_y^H - \sigma_y^O, \\ \tau'_{xy} &= \tau_{xy}^H - \tau_{xy}^O.\end{aligned}\quad (18)$$

где $\sigma_x^O, \sigma_y^O, \tau_{xy}^O$ – остаточные напряжения без нагрузки, $\sigma_x^H, \sigma_y^H, \tau_{xy}^H$ – напряжения нагруженного образца, которые описывают перераспределение остаточных напряжений под действием внешних нагрузок, $\sigma'_x, \sigma'_y, \tau'_{xy}$ – разность напряжений, описывающие действие внешних нагрузок на каждую точку образца.

После анализ полученных данных, рассчитанных по формуле (18), и установления закономерностей перераспределения остаточных напряжений под действием внешних нагрузок, можно перейти к решению задачи (3) для массива горных пород.

Решить задач (1) можно аналитическим и численным методами. При аналитическое решение задачи используется подход С.Г. Лехницкого/7/ и вариант метода Н.И. Мусхелешвили /8/, развитый в работах/2, 3/. Численное решение, основан на методе фиктивных нагрузок /9/, развитая в работе /3/ применительно к расчету распределения напряжений вокруг подземных выработок, т.е. внешней задаче. Поменяв, знаки в соответствующих выражениях /9/,

методика расчета для внешней задачи применяется для решения внутренней задачи.

Построенная математическая модель напряженного состояния массивов пород с остаточными напряжениями, основана на анализе экспериментальных данных. Для уточнения и дополнения модели нужно провести многовариантный расчет и сравнительный анализ полученных результатов с лабораторными и натурными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айтматов И.Т. Геомеханические условия в зонах очагов горных ударов и техногенных землетрясений // Тр. Международной научной конф. Современные концептуальные положения в механике горных пород"
2. Жумабаев Б. Распределение напряжений в массивах горных пород с гористым рельефом.- Фрунзе: Илим, 1988.- 212 с.
3. Аманалиев А.А., Жумабаев Б. Напряженное состояние пород вокруг выработок, расположенных в горной местности в слоистом массиве//Наука и новые технологии/ ГКННТ.- 1996.- С.16.
4. Аманалиев А.А. Численное моделирование напряженного состояния массива пород вокруг подземных выработок. / Сб. трудов Современные проблемы механики сплошных сред. Вып. 11. «Гидрогазодинамика, геомеханика и геотехнологии». Г. Бишкек. 2010 г. – с. 45-52.
5. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости.- М., Наука, 1979.- 560с.
6. Аманалиев А.А. Математический метод расчета по экспериментальным данным напряженного состояния твердых тел с остаточными напряжениями. – Бишкек, Сб. «Современные

- проблемы механики сплошной среды», Вып. №13//Труды Межд. Конф. «Проблемы геомеханики и освоения недр», 2011, С. 368-375.
7. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела.– М.:Наука, 1977.- 416 с.
 8. Мусхелешвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.– М.: Наука, 1966.–707 с.
 9. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела.– М.: Мир, 1987.– 328 с.