

## УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ НЕСНИЖАЕМОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Бийбосунов А.И., Жусупбекова С.Т.

КНУ им. Ж.Баласагына, КНАУ им. К.Скрябина

Рассматриваются уравнение неразрывности и уравнения движения для несжимаемой жидкости, обтекающей вогнутую поверхность:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = F_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = F_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = F_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

При асимптотическом анализе будем использовать, ставшие уже традиционными при построении асимптотических теорий, обозначения для различных областей возмущенного течения:

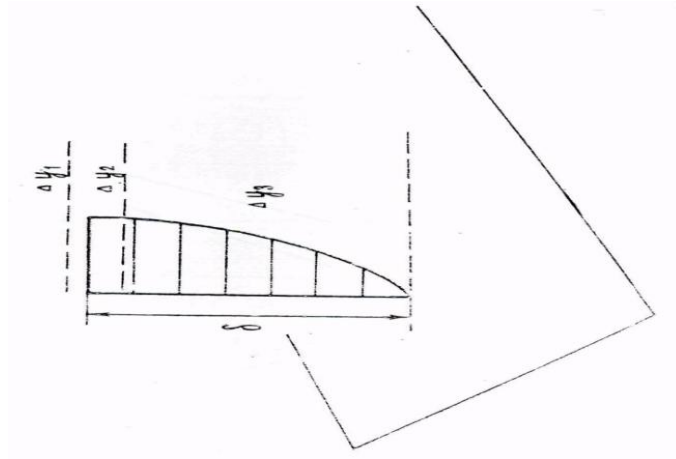


Рис. 1 Асимптотические области разложения.

Область I – возмущенная часть внешнего невязкого течения, ее характерная толщина

$$\Delta y_1 > \delta \sim O(\varepsilon)$$

Область II – основная часть пограничного слоя с характерной толщиной:

$$\Delta y_2 \sim \delta$$

Вязкая пристеночная область III с характерной толщиной:

$$\Delta y_3 < \delta$$

При построении асимптотической теории вихрей Гертлера [1] в пограничном слое жидкости будем предполагать, что потеря устойчивости основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности вызывает нелинейные возмущения функций течения в области их локализации, например:

$$\Delta u \sim u$$

Следовательно, возмущения от вихрей уже в первом приближении влияют на характеристики основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности. В поле центробежных сил тогда возникают возмущения давления:  $\Delta P \sim k u^2 \Delta y$ ,

которые индуцируют поперечные составляющие скорости:

$$w \sim \Delta w \sim \Delta P^{1/2} \sim k^{1/2} u \Delta y^{1/2}$$

Так как оценки для  $P$  и  $w$  получаются из сопоставления порядков величин конвективных членов уравнений (1), то очевидно, механизмы конвекции являются основными в процессе порождения вторичного вихревого течения.

Пусть возмущения зарождаются в области с характерной толщиной в виде:

$$\Delta y \sim O(a) < \delta \sim O(\varepsilon),$$

то есть толщиной меньшей, чем толщина пограничного слоя, расположенного непосредственно около вогнутой поверхности, где завихренность основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности является наибольшей, а функции течения изменяются пропорционально расстоянию от поверхности, например:

$$u \sim \Delta y / \varepsilon.$$

Тогда справедливы следующие оценки для функций течения:

$$u \sim O(a/\varepsilon), \quad \Delta P \sim O(\varkappa a^3/\varepsilon^2), \quad w \sim O(\varkappa^{1/2} a^{3/2}/\varepsilon) \quad (2)$$

Принимая, что в общем случае толщина возмущенной области «а» соизмерима с ее шириной -  $\Delta z \sim O(c) \sim O(a)$ , и приравнивая порядки величин членов уравнения неразрывности (4.1.15), можно получить, что:

$$a \sim c \sim O(\varkappa b^2) \quad (3)$$

где «а», «b» и «с» - характерные толщина, протяженность и ширина пространственной возмущенной вихревой области течения, и:

$$\varepsilon^2 < a < c < b < 1$$

Соотношения (2) и (3) позволяют оценить порядки величин конвективных и основных диссипативных членов уравнений движения:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \sim O(\varkappa^2 b^3/\varepsilon), \quad \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim O(\varepsilon \varkappa b^2)$$

Из этих оценок видно, что в наименее вырожденном случае, когда механизмы конвекции и диссипации равнозначны и:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \sim \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

протяженность возмущенной области « $b$ » по порядку величины равна:

$$b \sim O(\varepsilon^{3/5} / \varkappa^{3/5}) < 1 \quad (4)$$

Оценки (2), (3) и (4) позволяют для возмущенной вихревой области течения III с характерными размерами:

$$\Delta x \sim O(b) \sim O(\varepsilon / \varkappa)^{3/5}$$

$$\Delta y \sim \Delta z \sim O(a) \sim O(c) \sim O(\varepsilon^{6/5} / \varkappa^{1/5})$$

расположенной непосредственно около вогнутой поверхности, ввести следующие переменные и асимптотические разложения функций течения:

$$\begin{aligned} x &= (\varepsilon^{3/5} / \varkappa^{3/5}) X_3, \\ y &= (\varepsilon^{6/5} / \varkappa^{1/5}) Y_3, \\ z &= (\varepsilon^{6/5} / \varkappa^{1/5}) Z_3, \\ u &= (\varepsilon^{1/5} / \varkappa^{1/5}) u_3 + \dots, \\ v &= \varkappa^{1/5} \varepsilon^{4/5} v_3 + \dots, \\ w &= \varkappa^{1/5} \varepsilon^{4/5} w_3 + \dots, \\ \Delta P &= \varkappa^{2/5} \varepsilon^{8/5} P_3 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

где возмущение давления  $P$  отсчитывается от значения на вогнутой поверхности в точке зарождения неустойчивости основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности.

Теперь подставим разложения (5) в систему уравнений (1) и совершим предельный переход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon < \varkappa < 1$ . Тогда получим, что в первом приближении для области III справедливы параболизированные в продольном направлении уравнения Навье – Стокса без продольного градиента давления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_3}{\partial X_3} + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial Y_3} + \frac{\partial w_3}{\partial Z_3} &= 0 \\ U_3 \frac{\partial U_3}{\partial X_3} + \vartheta_3 \frac{\partial U_3}{\partial Y_3} + w_3 \frac{\partial U_3}{\partial Z_3} &= \frac{\partial^2 U_3}{\partial Y_3^2} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial Z_3^2} \end{aligned} \quad (6)$$

$$U_3 \frac{\partial \vartheta_3}{\partial X_3} + \vartheta_3 \frac{\partial \vartheta_3}{\partial Y_3} + w \frac{\partial \vartheta_3}{\partial Z_3} + KU^2_3 + \frac{\partial \rho_3}{\partial Y_3} = \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial Y^2_3} + \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial Z^2_3}$$

$$U_3 \frac{\partial w_3}{\partial X_3} + \vartheta_3 \frac{\partial w_3}{\partial Y_3} + w_3 \frac{\partial w_3}{\partial Z_3} + \frac{\partial \rho_3}{\partial Z_3} = \frac{\partial^2 w_3}{\partial Y^2_3} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial Z^2_3}$$

На вогнутой поверхности должны выполняться обычные условия прилипания и непротекания:

$$U_3 = \vartheta_3 = w_3 = 0, \quad Y_3 = 0 \quad (7)$$

Внешние и начальные краевые условия получаются из сращивания с решением для пристеночной части основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности (с нижней сдвиговой частью пограничного слоя около вогнутой поверхности):

$$U_3 \rightarrow AY_3, \quad \rho_3 \rightarrow -KA^2Y^3_3 \quad (8)$$

$$\vartheta_3, \quad w_3 \rightarrow 0, \quad X_3, \quad Y_3 \rightarrow \infty$$

где «А» - напряжение трения в продольном направлении на вогнутой поверхности в точке зарождения неустойчивости основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности.

Предполагается исследовать периодические по поперечной координате «Z» - решения, поэтому:

$$f(X_3, Y_3, Z_3) = f(X_3, Y_3, Z_3 + \lambda) \quad (9)$$

$$f = U_3, \vartheta_3, w_3, \rho_3$$

где  $\lambda$  - длина волны вытянутых в продольном направлении стационарных вихрей Гертлера.

Краевая задача (6) – (9) описывает эволюционное нелинейное развитие вихрей Гертлера с длиной волны меньшей толщины пограничного слоя около вогнутой поверхности. Из характеристик основного плоского течения вблизи вогнутой поверхности в краевую задачу (6) – (9) входит только величина «А». Так как протяженность исследуемой области течения мала (как видно из формулы 4)), то

здесь несущественно продольное изменение функций течения в основном плоском течении вблизи вогнутой поверхности, которое происходит на характерной длине  $X=O(1)$ . Фактически же развитие коротковолновых возмущений происходит в плоскопараллельном потоке.

Таким образом, разработаны асимптотические методы решения уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Перспективные решения могут найти также теоретическое и практическое применение в таких областях, как при исследовании динамики селевых и оползневых течений, в межлопаточных каналах и гидравлических процессах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике. Москва, изд-во Мир, 1967 г.
2. El – Hady N.M., Verma A.K. Instability of compressible layers along curved walls with suction or cooling. AIAA paper, 1982, №82.
3. Peerhossaini H. On the subject of Gortler vortices. Lecture notes in Physics, 1984, ed. S. Zaleski, pp. 376 – 384.
4. Бийбосунов А.И., Основы оползневых процессов в Кыргызстане и их классификация // Наука и новые технологии. – Бишкек, 2006. №3. – С. 50-52