

ПЛОСКИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В СОПЛАХ С ДВУМЯ СУЖЕНИЯМИ

Дыйканова А.Т., Туганбаев У.М.

Кыргызский Национальный Аграрный университет им. К.И.Скрябина

В данной работе предлагается метод решения плоской начально-краевой задачи теории сопла Лавала с двумя сужениями для нестационарного потока. Такого рода задачи для стационарных течений рассматривались в [1,2]. Авторы использовали идеальный газ, который был близок к однородному адиабатическому режиму реального газа в окрестности звуковой линии, а рассматриваемые уравнения были взяты как точные фундаментальные уравнения, подчиняющиеся соответствующему закону состояния. Классическое уравнение, описывающее такой нестационарный процесс в окрестности околосвуковых течений, записывается в виде [3]

$$-\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_{yy} - 2\varphi_{xt} = 0 \quad (1)$$

Продифференцировав уравнение (1) по x , при этом взяв $\varphi_x = u$, получим следующее уравнение

$$-[uu_{xx} + u_x^2] + u_{yy} - 2u_{xt} = 0. \quad (2)$$

Для последнего уравнения поставим следующие начально-краевые условия

$$u(x, y, 0) = P_0(x, y) - \text{начальное условие}, \quad (3)$$

$$u(x, 0, t) = P_1(x, y) = b_0 + b_1 T_1(t) x^2 - \text{на оси симметрии } y = 0, \quad (3a)$$

где b_0, b_1, P_0 - заданные постоянные и функция.

Для удовлетворения начально - краевых условий (3) и (3а), будем искать решения в виде

$$u(x, y, t) = B_1(y, t) + B_2(y)x^2. \quad (4)$$

Если определить все необходимые частные производные и подставить в уравнение (2), то получим следующую систему

$$1. B_2'' = 6B_2^2, \quad 2. B_{2t} = 0. \quad (5)$$

$$3. B_{1yy} - 2B_2B_1 = 0. \quad (6)$$

Из второго уравнения системы (5) видно, что функция B_2 действительно не зависит от переменной t . Вначале решим систему уравнений (5) (6) в окрестностях особых точек. На оси симметрии $y = 0$ решение уравнения (5) запишется как

$$1а. B_2(y) = a_1 + a_2y^2 + a_3y^4 + a_4y^6 + a_5y^8 - \text{на оси симметрии}, \quad (7)$$

где a_1 – произвол, $a_2 = 3a_1^2$, $a_3 = 3a_1^3$, $a_4 = 3a_1^4$, $a_5 = 18a_1^5/7$,

а в окрестности особой точки $y = y_0$, имеем

$$1б. B_2(y) = 1/(y - y_0)^2 \quad \text{в окрестности } y = y_0. \quad (8)$$

Это же уравнение в особой точке $y = 0$, имеет одно точное решение в виде

$$1в. B_2(y) = 1/r^2 \quad \text{в окрестности } y = 0. \quad (9)$$

Для определения искомой функции $B_1(y, t)$, представим ее как

$$B_1(y, t) = D_1(y)T_1(t), \quad (10)$$

тогда с учетом (10), уравнение (6) примет вид

$$D_1''(y) - 2B_2(y)D_1(y) = 0. \quad (11)$$

В вышеуказанных особенностях, искомые функции примут следующие соотношения

$$1а. D_1(y) = \alpha_0 + \alpha_1y^2 + \alpha_2y^4 + \alpha_3y^6 + \alpha_4y^8 + \dots, \quad (12)$$

где $\alpha_1 = a_1\alpha_0$, $\alpha_2 = 2a_1^2\alpha_0/3$, $\alpha_3 = 4a_1^3\alpha_0/9$, $\alpha_4 = 19a_1^4\alpha_0/63$.

$$16. \quad B_2(y) = (y - y_0)^{-2}, \quad D_1(y) = (y - y_0)^{-1}. \quad (13)$$

$$1в. \quad B_2(y) = y^{-2}, \quad D_1(y) = y^{-1}. \quad (14)$$

С учетом соотношений (14), уравнение (11) запишется в форме Бесселя

$$D_1''(y) - \frac{2}{y^2} D_1(y) = 0, \quad ,$$

где его решение примет вид $D_1(y) = c_1 y^{-1} + c_2 y^2$ (15)

Далее решим систему уравнений (5,6) с начально-краевыми условиями (3,3а), аналитически. Умножая первое уравнение на $B_2'(y)$ и дважды интегрируя, получим [4]

$$\frac{dB_2}{dy} = \pm \sqrt{4B_2 - q_3}, \quad q_3 = \text{const}, \quad (16)$$

где $B_2(y) = \gamma(y + c, 0, q_3)$, (17)

обратная функция эллиптической функции Вейерштрасса. Из начально-краевых условий (3,3а) имеем $B_2(0) = -b_1$, $B_2'(0) = 0$, (18)

отсюда $q_3 = -4b_1^3$, $q_2 = 0$, $e_1 = -4b_1^3$. (19)

Решением второго уравнения $D_1'' = 2\gamma D_1$ будет (20)

$$D_1(y) = c_1 \left\{ \left[\gamma' + 2(-b_1)^{3/2} \right]^{1/3} + \left[\gamma' - 2(-b_1)^{3/2} \right]^{1/3} \right\} \quad (21)$$

Теперь определим продольную составляющую компонента скорости, которая записывается в виде

$$u(x, y, t) = x^2 \gamma + c_1 \left\{ \left[\gamma' + 2(-b_1)^{3/2} \right]^{1/3} + \left[\gamma' - 2(-b_1)^{3/2} \right]^{1/3} \right\} \left(\frac{c_2 - e^{-2at}}{c_2 + e^{-2at}} \right) \quad (22)$$

В последнем решении функция $T_1(t)$ является произвольной функцией, поэтому она определена в таком виде, что при $t \rightarrow \infty$, обращается в постоянную величину.

Из решения (22) определим две звуковые линии при $u = 0$, причем они располагаются от оси $x = 0$ на расстоянии $x = b_0/b_1 = \pm 0,85$.

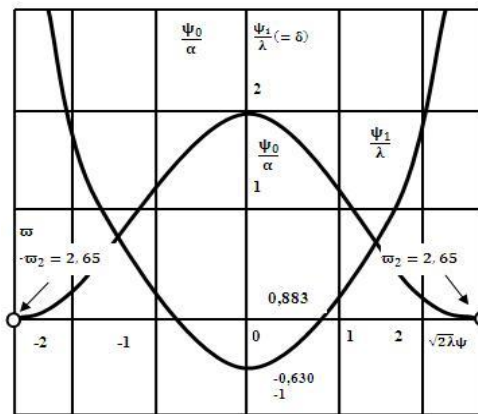


Рис.1. Поведение функции B_2 , D_1 при $q_3 = -1$

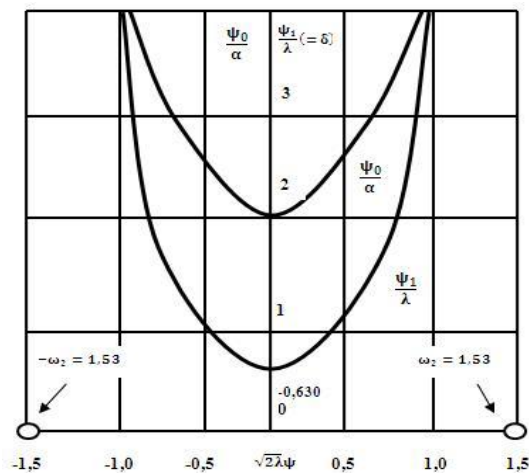
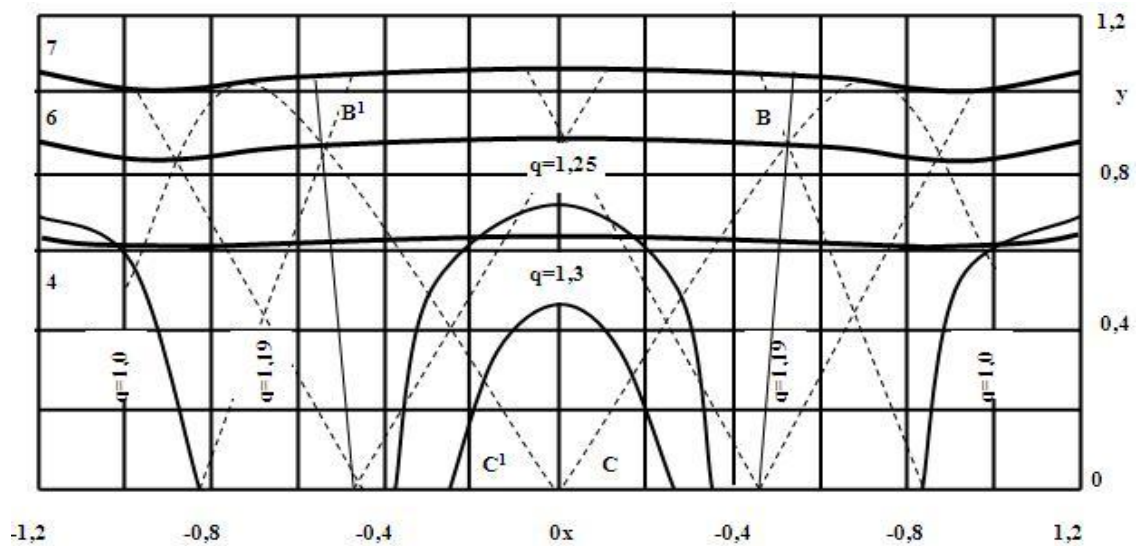


Рис. 2 . Поведение функции B_2 , D_1 при $q_3 = 1$



Физ.плоскость : — линия тока; — линия равных скоростей;
 ---- линия Маха (характеристики)

Рис.3. Плоское течение в сопле с двумя сужениями.

Здесь рассмотрены случаи, когда горловины сопла равны между собой, а наши расчеты хорошо согласуются с работами [1,5] при $t \rightarrow \infty$.

Отметим, что в соплах с двумя сужениями могут протекать различные течения газа. Положим, что перед первым сужением стенки сопла поток газа имеет дозвуковую скорость, а при выходе из второй сужающей части сопла газ, расширяясь, приобретает сверхзвуковую скорость.

В окрестности первого сужения сопла, около выпуклой части стенки, могут быть образованы местные сверхзвуковые зоны, а вдоль оси симметрии сопла скорость потока будет дозвуковой. Однако величина скорости потока газа будет больше при выходе из первого сужения стенки, во входе, оставаясь при этом дозвуковой. Таким образом, в окрестности первого сужения сопла осуществляется течение типа Тейлора. Продолжая поступательное движение, поток газа в окрестности второго сужения стенки переходит через звуковую поверхность, а при выходе будет иметь сверхзвуковую скорость. Таким образом, во втором критическом сечении сопла течение газа имеет мейеровский тип.

Теперь рассмотрим распределение давления вдоль направления движения потока в сопле. Обозначим значение давления перед первым сужением стенки сопла, т.е. давление на входе, через p_0 , давление на выходе из первого сужения – через p_1 , а давление за вторым сужением – через p_2 . Тогда будет выполняться неравенство для давлений $p_0 > p_1 > p_2$.

Введем обозначения для разности давлений: $\Delta p_1 = p_0 - p_1$, $\Delta p_2 = p_1 - p_2$. При этом для разностей давлений выполняется условие $\Delta p_1 > \Delta p_2$. Итак, в результате «работы» разности давлений в сопле Δp_1 , Δp_2 , будут иметь место околосвуковые течения газа в сопле с двумя

сужениями. На рис.1, рис.2, рис.3. указаны поведения функций B_2 , D_1 и плоский поток на реальной плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tomotika S., Tamada K. Studies an two-dimensional transonic flows of compressible fluids.-Qurt. Of Apple. Mathem., 1950, vol №4, part I, P.381-391.
2. Чечейбаев Б. Исследование околосвуковых пространственных течений газа в сопле с двумя сужениями и в слабовогнутой трубе. Вестник КНУ им. Ж.Баласагына, 2004.-С.76-81.
3. Цзянь Х.Ш., Лин П.П., Рейснер Г. О двумерном неустановившемся движении тонкого крыла в сжимаемой жидкости. Газовая динамика. М.: Изд-во иностр.лит., 1950.С.183-196.
4. Ахиезер Р.И. Элементы теории эллипт. функций. – М.: Наука,1970. -304с.
5. Пирумов У.Г., Росляков Г.С. Течения газа в соплах.-М.:Изд-во Москов.Университета, 1978.-352с.