

УДК 517.928

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О НЕПРЕРЫВНЫХ ОБЪЕКТАХ НА ДИСКРЕТНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВАХ

Аскар к. Л, Бейшебаева Ж. К., Саатбек к. А., Маматшарип у. Д.
Кыргызский Национальный университет им. Ж. Баласагына,

В статье рассматриваются методы приближённого решения задач о непрерывных объектах на дискретных вычислительных устройствах. Вводятся понятия вычислительной и доказательной устойчивости, а также используются методы интервального анализа. Получены результаты о существовании и устойчивости решения интегрального уравнения первого рода с аналитической правой частью и разработаны алгоритмы приближенного решения.

Ключевые слова: непрерывные объекты, дискретные вычислительные устройства, приближённое решение, вычислительная устойчивость, доказательные вычисления, интервальный анализ, машинные интервалы, интегральное уравнение первого рода, аналитические функции.

ДИСКРЕТТИК ЭСЕПТӨӨЧҮ ТҮЗМӨЛӨРДӨГҮ ҮЗГҮЛТҮКСҮЗ ОБЪЕКТТЕРДИН МАСЕЛЕЛЕРИНИН БОЛЖОЛДУУ ЧЕЧИМИ

Аскар к. Л, Бейшебаева Ж. К., Саатбек к. А., Маматшарип у. Д.
Ж. Баласагын атындагы Кыргыз Улуттук университети

Бул макалада дискреттик эсептөө түзүлүштөрүндөгү үзгүлтүксүз объектилер менен байланышкан маселелердин болжолдуу чыгаруунун ыкмалары каралат. Эсептөө жана далилдөө туруктуулугу түшүнүктөрү киргизилет жана интервалдык анализ ыкмалары колдонулат. Аналитикалык оң жактары бар биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелердин чыгарылыштары бар экендиги жана туруктуулугу боюнча

жыйынтыктар алынат жана болжолдуу чыгарылыштар үчүн алгоритмдер иштелип чыгат.

Баштапкы сөздөр: үзгүлтүксүз объектилер, дискреттик эсептөө түзүлүштөрү, болжолдуу чыгарылыш, эсептөө туруктуулугу, далилдөөгө негизделген эсептөөлөр, интервалдык анализ, машина аралыктары, биринчи түрдөгү интегралдык теңдеме, аналитикалык функциялар.

APPROXIMATE SOLUTION OF PROBLEMS OF CONTINUOUS OBJECTS ON DISCRETE COMPUTING DEVICES

Askar K. L., Beyshebaeva Zh. K., Saatbek K. A., Mamatsharip U. D.

Kyrgyz National University named after. Zh. Balasagyn

This article examines methods for approximate solutions to problems involving continuous objects on discrete computing devices. The concepts of computational and proof stability are introduced, and interval analysis methods are used. Results are obtained on the existence and stability of solutions to integral equations of the first kind with analytic right-hand sides, and algorithms for approximate solutions are developed.

Keywords: continuous objects, discrete computing devices, approximate solution, computational stability, proof-based computations, interval analysis, machine intervals, integral equation of the first kind, analytic functions.

Введение

Современная наука и техника имеют дело с объектами и процессами непрерывной природы: движением тел, распространением тепла, электромагнитными полями, течением жидкостей, экономической динамикой и многими другими явлениями. Эти объекты описываются непрерывными величинами и, как правило, математическими моделями в виде дифференциальных и интегральных уравнений [5-7].

Однако вычислительные устройства, используемые для анализа и моделирования таких процессов, являются дискретными по своей природе: они оперируют конечным набором чисел с ограниченной точностью и выполняют алгоритмы, разбитые на отдельные шаги. В результате возникает фундаментальная задача — как приближённо решать задачи о непрерывных объектах на дискретных вычислительных устройствах [1-4].

1. Классификации применения компьютеров

При строгой (математической) постановке задачи на поиск непрерывного объекта (функции вещественной переменной, фигуры, кривой), ответ, данный дискретным вычислительным устройством - компьютером (результат работы программы), может

- заведомо совпадать с истинным;
- иметь гарантированную связь с истинным (в тех случаях, когда истинный ответ нельзя изобразить средствами компьютера);
- иметь нестрогую (статистическую) связь с истинным.

Строгие доказательства теорем для непрерывных объектов на компьютере (в том числе и найденных по предыдущему методу) можно неформально подразделить следующим образом:

- дающие истинные результаты - эвристически-логические методы; символьные преобразования (включая символьное дифференцирование, интегрирование); точные вычисления (с целыми числами и построенными из них объектами);
- обеспечивающие гарантированную связь с истинными результатами - разработанные, в том числе в Кыргызстане доказательные вычисления («далил боло алуучу эсептөө», «validating computations», «reliable computations»).

Как и другие комбинированные человеко-машинные методы, этот метод содержит схемы (предназначенные для человека) сведения различных задач к нескольким стандартным и алгоритмы (для компьютера) решения этих задач.

Вследствие того, что основной объект математического анализа - вещественное число - не имеет конструктивных представлений, точные результаты для непрерывных объектов (функций, геометрических фигур) можно получить на компьютере только в особых случаях. Это и вызвало развитие приближенных методов, которые имеют такие широкие приложения к практическим задачам.

2. Методы и результаты

Для более точной формулировки результатов вычислений мы предлагаем следующее определение, обобщающее известные понятия вычислительной математики:

Пусть имеется метрическое пространство $\{G, \rho\}$, набор конечных множеств $\{M_k: k \in N\}$ и набор отображений-интерпретаций $\{F_k \in M_k \rightarrow G: k \in N\}$.

О п р е д е л е н и е 1. Некоторый способ (алгоритм) получения последовательности $\{Z_k \in M_k: k \in \mathbb{N}\}$ будем называть абсолютно вычислительно устойчивой аппроксимацией объекта $Z \in G$, если

$$\lim \{\rho(Z, F(Z_k)): k \rightarrow \infty\} = 0. \quad (1)$$

Практически для описания вычислительных алгоритмов в качестве множеств M_k берут не конечные, а конечномерные пространства вещественных чисел или векторов (хотя вещественное число не имеет конструктивных представлений), в качестве отображений F

- сплайн-функцию или кусочно-линейную функцию по элементам Z_k , если они интерпретируются, как значения искомой функции в некоторых точках;
- сумму отрезка ряда Фурье или Тейлора по элементам Z_k , если они интерпретируются, как коэффициенты ряда, представляющего искомую функцию.

Отмеченное явление в литературе иногда называется вычислительной устойчивостью, хотя мы считаем, что наша формулировка более точная, поскольку реальная вычислительная устойчивость должна учитывать вычислительные погрешности. Известно множество случаев, когда соотношение (1) формально выполняется, но реальные вычисления с конечной точностью дают результаты, заведомо далекие от истинного при любых значениях параметров.

В теоретических исследованиях отмеченный недостаток (наличие только статистической связи между точным и приближенным результатом) дает возможность применять вычислительные методы только для эвристического поиска закономерностей, которые потом устанавливаются дедуктивно [8-10].

Для формулировки теорем доказательных вычислений используются построения конструктивного математического анализа. В нем в рамках введены определения односторонне псевдовычислимого числа как предела ограниченной монотонной алгоритмически заданной последовательности рациональных чисел и конструктивно устойчивого предиката, обобщающие свойства, называемые в различных разделах математики «грубость».

Определение 2. Доказательные вычисления – это вычисления, организованные таким образом, что полученные (числовые) результаты, интерпретируемые, как континуальные множества, гарантированно содержат истинные.

Соответственно, в Определении 1 значениями функции F_k должны быть не элементы, а (ограниченные) множества пространства G , и основное предельное соотношение (1) - иметь вид

$$Z \in F(Z_k), \lim \{diam F(Z_k): k \rightarrow \infty\} = 0.$$

Практически полученные на компьютере результаты представляются в виде наборов рациональных (или, более узко, машинных вещественных- непосредственно представимых в компьютере в силу его конструкции, по терминологии программирования) чисел.

Для сочетания математической строгости и удобства работы на компьютере был разработан интервальный анализ.

О п р е д е л е н и е 3. Интервальным числом (ниже коротко – интервалом) называется замкнутый отрезок $A=[a_-, a_+]$ (эта терминология несколько расходится с принятой в других разделах математики). Если числа a_- и a_+ – машинно представимые, то A называется машинным интервалом.

Величина $wid(A) := a_+ - a_-$ называется шириной интервала. Шириной интервального вектора называется максимум ширин его компонент.

О п р е д е л е н и е 4. Если число (или другой объект) f находится в интервале (соответственно в интервальном векторе или другом интервальном объекте) A , то A называется внешним представлением объекта f (аналогично – машинным внешним представлением).

В частности, внешним представлением комплексного числа может быть пара интервалов для его действительной и мнимой частей – комплексный интервал. Чем меньше ширина интервального объекта, тем лучшим является внешнее представление.

Над интервалами определены арифметические действия (в числе других двуместных и одноместных функций) по формуле

$$F(X, Y) = [\min \{f(x, y): x \in X, y \in Y\}; \max \{f(x, y): x \in X, y \in Y\}].$$

Если результат арифметического действия над границами машинных интервалов не является машинным числом, то для обеспечения доказательности нижние границы интервалов округляются с недостатком, а верхние – с избытком.

Над интервалами также производятся действия: пересечения двух интервалов (если оно не пусто), внешнего представления двух интервалов, разбиения интервала на два.

Основным преимуществом интервального анализа является то, что действия только над границами интервалов (конечным набором чисел) дают гарантированный результат (теорему) о бесконечных множествах чисел или других объектов, находящихся в этих границах, причем такие действия легко выполнить на компьютере. Если такие интервалы (интервальные векторы) образуют конечное покрытие заданной

компактной области, то вычисления по их границам доказывают теорему о всех точках этой области.

О п р е д е л е н и е 5. Алгоритм, который по любому (машинному) интервалу X , входящему в область $G \subset \mathbf{R}$ определения функции $f: G \rightarrow \mathbf{R}$, дает такой (машинный) интервал F , что

F1) из $x \in X$ следует $f(x) \in F(X)$ {внешнее представление};

F2) из $X_1 \subset X_2$ следует $F(X_1) \subset F(X_2)$ {монотонность по вложению};

F3) (для любых интервалов) $\lim\{F(X): X \rightarrow [x, x]\} = [f(x), f(x)]$ {точечность}; для машинных интервалов $F([x, x])$ должен быть достаточно узким, называется (машинным) интервальным расширением функции f .

Аналогично определяется интервальное расширение функции нескольких переменных.

При программировании последовательности вида $\{Z_k\}$ обычно вводится малый параметр (например, шаг сетки) или большой параметр (например, количество шагов). Не умаляя общности, будем считать, что такими параметрами являются $(\frac{1}{k})$ и k . Будем также считать, что множества $\{M_k\}$ составлены из машинных чисел. Из вычислительной практики следует

О п р е д е л е н и е 6. Некоторый алгоритм получения последовательности $\{Z_k \in M_k: k \in \mathbf{N}\}$ будем называть вычислительно устойчивой аппроксимацией объекта $Z \in G$, если $\rho(Z, F(Z_k))$ уменьшается и становится достаточно малым с увеличением k , пока малый параметр не становится близким к разности соседних машинных чисел. (Соответственно - доказательно устойчивой аппроксимацией, если $\text{diam } F(Z_k)$ уменьшается и становится достаточно малым с увеличением k).

По нашему опыту, возможны случаи, когда неустойчивая вычислительная схема применительно к корректной задаче дает сначала сходимость, а потом - расходимость. Поэтому предлагаем

О п р е д е л е н и е 7. Некоторый алгоритм получения последовательности $\{Z_k \in M_k: k \in \mathbf{N}\}$ будем называть ограниченно вычислительно устойчивой аппроксимацией объекта $Z \in G$, если $\rho(Z, F(Z_k))$ уменьшается и становится достаточно малым с увеличением k , но потом увеличивается, при этом малый параметр не становится близким к разности соседних машинных чисел.

Т е о р е м а. Если функция $f(x): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ - целая аналитическая экспоненциального типа по своим переменным с вещественными коэффи-

циентами, то существует такое же целое аналитическое решение скалярного интегрального уравнения первого рода

$$J(x; w(s): s) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-b(x - \xi)^2) w(\xi) d\xi = f(x). \quad (2)$$

Это решение выражается формулой

$$\begin{aligned} w(x) = J^{-1}(x; f(s): s) &= \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (4b)^k} (-1)^k f^{(2k)}(x) = \\ &= \sqrt{\frac{b}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4b} \frac{d^2}{dx^2}\right) f(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Оно устойчиво по $f(x)$ в пространстве A_{+v} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем из (3)

$$w^{(p)}(x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (4b)^k} (-1)^k f^{(2k+p)}(x), \quad p \in \mathbf{N}_0. \quad (4)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |w^{(p)}(0)| &\leq \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (4b)^k} |f^{(2k+p)}(0)| \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{b}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (4b)^k} \|f\|_{+v} v^{2k+p} = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \|f\|_{+v} \exp\left(\frac{v^2}{4b}\right) v^p; \\ \|w\|_{+v} &= \sup\{|w^{(p)}(0)| v^{-p} : p \in \mathbf{N}_0\} = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \|f\|_{+v} \exp\left(\frac{v^2}{4b}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, обратный оператор ограничен. Его операторная норма

$$\|J^{-1}\|_{+v} \leq \sqrt{\frac{b}{\pi}} \exp \frac{v^2}{4b}. \quad (5)$$

Теорема доказана.

Алгоритмы приближенных решений скалярных интегральных уравнений первого рода

Из формулы (3) получаем

$$w(x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{4bn} \frac{d^2}{dx^2}\right)^n f(x). \quad (6)$$

Обозначим оператор сдвига на h аргумента функции через D_h .

В свою очередь, аппроксимируя вторую производную через разделенную разность, получим

$$w(x) \approx \sqrt{\frac{b}{\pi}} \left(1 - \frac{1}{4bn} \frac{1}{h^2} (D_h - 2D_0 + D_{-h})\right)^n f(x),$$

где $n \in \mathbb{N}$ достаточно велико, и $h \in \mathbb{R}_{++}$ достаточно мало.

Из теории приближенных методов для уравнения теплопроводности известно, что (для знака (+) в скобке) этих условий еще недостаточно для получения приемлемых результатов, необходимо согласование n и h . Поэтому в изучаемом случае были рассмотрены различные согласования.

Была составлена программа и решен контрольный пример. В результате расчетов найдено явление ограниченной вычислительной устойчивости.

Заключение

Построено программное обеспечение для устойчивого решения конкретных линейных и нелинейных интегральных уравнений первого рода. Обнаружено явление ограниченной вычислительной устойчивости по параметру - шагу сетки.

Полученные результаты можно использовать для построения приближенного решения обратных задач математической физики. Построенное программное обеспечение с соответствующими модификациями можно использовать для приближенного решения различных интегральных уравнений первого рода, причем обнаруженное явление ограниченной вычислительной устойчивости будет косвенно подтверждать корректность таких уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. - Москва: Наука, 1978.
2. Арсенин В.Я. О решении некоторых интегральных уравнений первого рода типа свертки методом регуляризации / В.Я.Арсенин, В.В. Иванов // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1968. - Т. 8, №2.
3. Арсенин В.Я. О применении метода регуляризации к интегральным уравнениям первого рода типа свертки / В.Я.Арсенин, Т. И. Савелова // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1969,9, №6.
4. Арсенин В.Я. Об одном способе приближенных решений интегральных уравнений первого рода типа свертки / В.Я.Арсенин // Труды МИАН СССР, 1973, том 133.
5. Аскар кызы Л. Класс интегральных уравнений первого рода, имеющих решение при любой правой части / Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л. //

Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики: труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Г. И. Марчука, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. - Новосибирск: Абвей, 2015. - С.321-325.

6. Аскар кызы Л. Эффекты и явления в теории динамических систем / Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л. //Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке. Материалы международной научно-практической конференции. – Алматы: КазНПУ имени Абая, 2015. -С.340-343.
7. Аскар кызы Л. Поиск эффектов / Г.М., Кененбаева, Л. Аскар кызы // Вестник КРСУ. Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: Том 1, Бишкек, 2013. –С. 187-191.
8. Askar kyzy L. Conditions of positivity of solutions of integral equations of the first kind in the space of analytical functions / L. Askar kyzy // Abstracts of the V International Scientific Conference “Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics” devoted to the 85 anniversary of Academician M. Imanaliev / Ed. by Academician A.Borubaev. - Bishkek, 2016. – P. 35.
9. Аскар кызы Л. Корректность решения двумерного интегрального уравнения первого рода с аналитическими функциями / Л.Аскар кызы // Проблемы современной науки и образования, 2016, № 21(63). - Иваново: изд. Олимп. – С. 6-9. (РИНЦ)
10. Аскар кызы Л. Условия существования положительных решений линейных интегральных уравнений первого рода / Л. Аскар кызы // Вестник ЖАГУ, 2016, № 1 (32). – С.24-29.