

УДК 517.928

КОРРЕКТНОСТЬ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Аскар к. Л., Бейшебаева Ж. К., Солдатбек к. Б., Жуманалы к. Г.
Кыргызский Национальный университет им. Ж. Баласагына,

В статье исследуется корректность решения начальной задачи для уравнения теплопроводности с обратным временем в многомерном пространстве. Рассматриваются начальные данные в виде целых аналитических функций экспоненциального типа. Доказано существование и устойчивость аналитического решения в соответствующих функциональных пространствах, а также получены результаты для интегральных уравнений первого рода.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, обратное время, начальная задача, корректность, устойчивость решения, аналитические функции, целые функции, экспоненциальный тип, многомерное пространство, оператор дифференцирования, степенной ряд, интегральное уравнение первого рода.

АНАЛИТИКАЛЫК ФУНКЦИЯЛАР МЕНЕН КӨП ӨЛЧӨМДҮҮ МЕЙКИНДИКТЕ БАШТАПКЫ МАСЕЛЕНИ ЧЕЧҮҮНҮН КОРРЕКТҮҮЛҮГҮ

Аскар к. Л., Бейшебаева Ж. К., Солдатбек к. Б., Жуманалы к. Г.
Ж. Баласагына атындагы Кыргыз Улуттук университети

Бул макалада көп өлчөмдүү мейкиндиктеги тескери убакыт жылуулук теңдемеси үчүн баштапкы маселенин чыгарылышынын коррективдүүлүгү каралат. Баштапкы маалыматтар экспоненциалдык типтеги бүтүндөй аналитикалык функциялар катары каралат. Аналитикалык чыгарылыштын тиешелүү функция мейкиндиктеринде бар экендиги жана туруктуулугу далилденген жана биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелер үчүн жыйынтыктар алынган.

Баштапкы сөздөр: жылуулук теңдемеси, тескери убакыт, баштапкы маселе, чыгарылыштын туруктуулугу, аналитикалык функциялар, бүтүн функциялар, экспоненциалдык тип, көп өлчөмдүү мейкиндик, дифференциациялоо оператору, даражалык катар, биринчи түрдөгү интегралдык теңдеме.

CORRECTNESS OF THE SOLUTION TO THE INITIAL PROBLEM IN MULTIDIMENSIONAL SPACE WITH ANALYTICAL FUNCTIONS

Askar K. L., Beyshebaeva Zh. K., Soldatbek K. B., Zhumanaly K. G.
Kyrgyz National University named after. Zh. Balasagyn

This article examines the well-posedness of the solution to an initial-value problem for the inverse-time heat equation in a multidimensional space. The initial data are considered as entire analytic functions of exponential type. The existence and stability of the analytic solution in the corresponding function spaces are proven, and results are obtained for integral equations of the first kind.

Keywords: heat equation, inverse time, initial-value problem, well-posedness, stability of the solution, analytic functions, entire functions, exponential type, multidimensional space, differentiation operator, power series, integral equation of the first kind.

Введение. Нахождение возможно широких условий для корректности [4]- [9] решения начальной задачи [1] для уравнения теплопроводности в многомерном пространстве с аналитическими функциями, являющееся корректными, то есть имеющими устойчивое решение, определяет актуальность данной работы.

На основе использования эффекта аналитичности [2], [3], [5], [7] [10] построены новые классы корректных линейных и нелинейных интегральных уравнений первого рода с одной, двумя и многими переменными, являющихся корректными в соответствующих пространствах функций, построены приближенные методы для их устойчивого решения. Построены компьютерные программы для устойчивого построения приближенных решений некоторых типов таких уравнений.

Построенное программное обеспечение с соответствующими модификациями можно использовать для приближенного решения

различных уравнений, причем обнаруженный результат будет косвенно подтверждать корректность таких уравнений.

Методы и материалы.

Используются следующие обозначения:

A_v (для $v > 0$) – пространство целых аналитических функций экспоненциального типа с показателем v , то есть удовлетворяющих условию: $(\forall f(z) \in A_v)(\exists c > 0)(\forall z \in C)(|f(z)| < c e^{v|z|})$.

Норма в пространстве A_v : $\|f\|_v := \sup\{|f(z)| e^{-v|z|} : z \in C\}$.

A_{+v} – пространство целых аналитических функций $f(z)$ таких, что в некоторой точке (можно принять – в начале координат) последовательность их производных имеет скорость роста не выше степенного:

$(\forall f(z) \in A_{+v})(\exists c > 0)(\forall k \in N_0 = \{0, 1, 2, 3 \dots\})(|f^{(k)}(0)| \leq c v^k)$.

Норма в пространстве A_{+v} : $\|f\|_{+v} := \sup\{|f^{(k)}(0)| v^{-k} : k \in N_0\}$.

Соответственно, будем обозначать A_{2v} – пространство аналитических функций двух переменных с условием

$(|f(z, w)| < c e^{v(|z|+|w|)})$;

A_{n+v} – пространство аналитических функций n переменных с условием:

$\left| \frac{\partial^{|I|} f(0)}{\partial x^I} \right| < \text{const } v^{|I|}$ с нормой $\|f(x)\|_{n+v} := \sup \left\{ \left| \frac{\partial^{|I|} f(0)}{\partial x^I} \right| v^{-|I|} : I \in N_0^n \right\}$.

В пространстве A_{n+v} норма оператора частного дифференцирования D по одной из переменных (не умаляя общности, будем считать - по первой переменной). Временно введем обозначение «единичного» мультииндекса $E := (1, 0, \dots, 0)$.

$$\begin{aligned} \|Df(x)\|_{n+v} &= \left\| D \sum \left\{ \frac{1}{I!} D^I f(0) x^I : I \in N_0^n \right\} \right\|_{n+v} = \\ &= \left\| \sum \left\{ \frac{1}{I!} D^I f(0) i_1 x^{I-E} : I \in N_0^n, I \neq E \right\} \right\|_{n+v} = \\ &= \left\| \sum \left\{ \frac{1}{(I-E)!} D^I f(0) x^{I-E} : I \in N_0^n, I \neq E \right\} \right\|_{n+v} = \\ &= \left\| \sum \left\{ \frac{1}{I!} D^{I+E} f(0) x^I : I \in N_0^n \right\} \right\|_{n+v} = \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{I!} |D^{I+E} f(0)| v^{-|I|} : I \in N_0^n \right\} \leq \sup \{ \|f\|_{n+v} v^{|I+E|} v^{-|I|} : I \in N_0^n \} = \\ &= \|f\|_{n+v} v. \end{aligned}$$

Таким образом, операторная норма

$$\|D\|_{n+v} \leq v. \quad (1)$$

Ограниченность оператора дифференцирования в пространстве A_{n+v} и обеспечивает корректность ряда задач, которые являются некорректными в других пространствах.

Результаты.

Рассмотрим многомерное уравнение теплопроводности с обратным временем в R^n

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = -a \Delta u(t, x), (t, x) \in R_{++} \times R^n, a > 0 \quad (2)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = \varphi(x), x \in R^n, \quad (3)$$

где $\varphi(z) \in A_{n+v}$ и принимает вещественные значения при вещественных значениях аргумента.

Формальный ряд для решения. Будем искать решение (2)-(3) в виде

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) t^k, \quad (4)$$

где $u_k(x)$ – искомые целые аналитические функции. (Сходимость этого ряда и рядов, получающихся из него дифференцированием по x и по t , пока не рассматривается).

Подставляя (4) в (3), получаем, что

$$u_0(x) = \varphi(x). \quad (5)$$

Подставляя (4) в (2) и также формально дифференцируя ряд почленно, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) k t^{k-1} = -a \sum_{k=0}^{\infty} \Delta u_k(x) t^k. \quad (6)$$

Заменяя переменную суммирования в левой части ($k-1$ на k), имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{k+1}(x) (k+1) t^k = -a \sum_{k=0}^{\infty} \Delta u_k(x) t^k.$$

Приравнявая сомножители при одинаковых степенях t^k , получаем соотношения

$$u_{k+1}(x) = -\frac{1}{k+1} a \Delta u_k(x), k \in N_0. \quad (7)$$

Из оценки (1) получаем: операторная норма

$$\|\Delta\|_{n+v} = n v^2. \quad (8)$$

Т е о р е м а 1. Если функция $\varphi(z)$ -целая аналитическая экспоненциального типа, то существует целое аналитическое решение задачи (2)-(3), которое выражается формулой:

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-a)^k \Delta^k \varphi(x) t^k = \exp(-at \Delta) \varphi(x). \quad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что этот ряд сходится (абсолютно). Для этого построим мажорирующий ряд.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k \|\Delta^k \varphi(x)\|_{n+v} t^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k (n v^2)^k \|\varphi(x)\|_{n+v} t^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (atnv^2)^k \|\varphi(x)\|_{n+v} = \|\varphi(x)\|_{n+v} \exp(anv^2 t).$$

Так же доказывается сходимость рядов дифференцированием. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Для любых $T > 0, X > 0, Y > 0$ существует такая константа $\gamma > 0$, что в области $\{(t, x): 0 \leq t \leq T, \|x\| \leq X\}$ $|\Delta u(t, x)| \leq \gamma$; для любого $h > 0$ будет

$$|u(t+h, x) - (u(t, x) - ah\Delta u(t, x))| \leq \gamma h^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: для второй части. Перепишем (9) в виде

$$u(t, x) = \varphi(x) - a\Delta\varphi(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} (-a^2)^k \Delta^k \varphi(x) t^k;$$

$$|u(t, x) - (\varphi(x) - a\Delta\varphi(x))| = \left| t^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} (-a^2)^k \Delta^k \varphi(x) t^{k-2} \right|.$$

Т е о р е м а 2. В условиях Теоремы 1

$$\lim\{u(t, x) - (E - at\Delta/m)^m \varphi(x): m \in \mathbf{N}\} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из того факта, что коэффициенты разложения $(1 + \frac{1}{m})^m$ стремятся к коэффициентам разложения $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ при $m \rightarrow \infty$ и имеют тот же знак, а также из абсолютной сходимости ряда (9).

Рассмотрим более общее уравнение:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = \Lambda u(t, x), (t, x) \in \mathbf{R}_{++} \times \mathbf{R}^n, \quad (10)$$

где Λ - линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, с начальным условием (3).

Аналогично Теоремам 1 и 2 доказываются более общие

Т е о р е м а 3. Если функция $\varphi(z)$ -целая аналитическая экспоненциального типа, то существует целое аналитическое решение задачи (10)-(3), которое выражается формулой:

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Lambda^k \varphi(x) t^k = \exp(t\Lambda) \varphi(x), \quad (11)$$

ряд абсолютно сходится.

Т е о р е м а 4. В условиях Теоремы 3

$$\lim\{u(t, x) - (E + t\Lambda/m)^m \varphi(x): m \in \mathbf{N}\} = 0.$$

Зафиксируем некоторое $T > 0$ и обозначим $w(x) = u(T, x)$. Тогда получим в силу известной интегральной формулы для решения уравнения начальной задачи (3) для уравнения теплопроводности(2):

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\sqrt{Ta\pi})^n} \int_{\mathbf{R}^n} \exp\left(-\frac{|x - \xi|^2}{4aT}\right) w(\xi) d\xi.$$

Обозначим $b := \frac{1}{4aT}$, $f(x) := \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\frac{n}{2}} \varphi(x)$. Тогда получим: $T := \frac{1}{4ab}$,

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \exp(-b|x - \xi|^2) w(\xi) d\xi.$$

Отсюда следует

Т е о р е м а 5. Если функция $f(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ -целая аналитическая экспоненциального типа по своим переменным с вещественными коэффициентами, то существует такое же целое аналитическое решение интегрального уравнения первого рода

$$J_n(x; w(s): s) = \int_{\mathbf{R}^n} \exp(-b|x - \xi|^2) w(\xi) d\xi = f(x). \quad (12)$$

Это решение выражается формулой

$$\begin{aligned} w(x) = J_n^{-1}(x; f(s): s) &= \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (4b)^k} (-1)^k \Delta^k f(x) = \\ &= \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{4b} \Delta\right) f(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Оно устойчиво по $f(x)$ в пространстве A_{n+v} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя в (9), получаем

$$\begin{aligned} w(x) &= \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-a)^k \Delta^k f(x) \left(\frac{1}{4ab}\right)^k = \\ &= \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (4b)^k} \Delta^k f(x). \end{aligned}$$

Заключение

Доказаны результаты о корректности решения задач с обратным временем для уравнения теплопроводности. Полученные результаты можно использовать для построения приближенного решения обратных задач математической физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. - Москва: Наука, 1978.
2. Аскар кызы Л. Эффекты и явления в теории динамических систем / Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л. //Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке. Материалы международной научно-практической конференции. – Алматы: КазНПУ имени Абая, 2015. -С.340-343.

3. Аскар кызы Л. Поиск эффектов / Г.М., Кененбаева, Л. Аскар кызы // Вестник КРСУ. Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: Том1, Бишкек, 2013. –С. 187-191.
4. Askar kyzy L. Conditions of positivity of solutions of integral equations of the first kind in the space of analytical functions / L. Askar kyzy // Abstracts of the V International Scientific Conference “Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics” devoted to the 85 anniversary of Academician M. Imanaliev / Ed. by Academician A.Borubaev. - Bishkek, 2016. – P. 35.
5. Аскар кызы Л. Корректность решения двумерного интегрального уравнения первого рода с аналитическими функциями / Л.Аскар кызы // Проблемы современной науки и образования, 2016, № 21(63). - Иваново: изд. Олимп. – С. 6-9. (РИНЦ)
6. Аскар кызы Л. Условия существования положительных решений линейных интегральных уравнений первого рода / Л. Аскар кызы // Вестник ЖАГУ, 2016, № 1 (32). – С.24-29.
7. Аскар кызы Л. Корректность интегральных уравнений первого рода типа Гаммерштейна с аналитическими функциями / Л. Аскар кызы // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана, 2017, № 5. - С. 78-80.
8. Панков П.С. Корректность обратной начальной задачи для уравнения теплопроводности с аналитическими данными / П. С. Панков, Х.С. Сабирова// Дифференциальные уравнения в частных производных и родственные проблемы анализа и информатики: Труды международной научной конференции. Том 1. – Ташкент, 2004. – С. 117-121.
9. Панков П.С. Применение метода сеток к обратной начальной задаче для уравнения теплопроводности с аналитическим начальным условием / П. С. Панков, Х. С. Сабирова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына: серия 3. Естественно-технические науки. - Выпуск 3. Математические науки. Информатика и информационные технологии. – Бишкек, 2005. - С. 103-106.
10. Кененбаева Г.М. Теория и методика поиска новых эффектов и явлений в теории возмущенных дифференциальных и разностных уравнений. – Бишкек: Илим, 2012. - 204 с.