

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЛИНЕЙНОГО ПЛОСКОГО ОКОЛОЗВУКОВОГО УРАВНЕНИЯ

Дыйканова А.Т.

Кыргызский Национальный Аграрный Университет им. К.И.Скрябина.

В работе [1], основное нестационарное уравнение Линя-Рейснера-Тзяна в околозвуковом приближении рассматривается как линейное.

В данной работе рассматривается именно предлагаемая математическая модель, которая является как предельный случай более сложного околозвукового уравнения гиперболического типа. Здесь естественно, возникают вопросы об обосновании соответствующего подхода, а также нахождения решений и указать соответствие между решениями линеаризованного уравнения и классическим уравнением в нестационарном околозвуковом потоке газа

$$-\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_{yy} - 2\varphi_{xt} = 0. \quad (1)$$

Известно, что это уравнение было получено Линем-Рейснером-Тзяном, которые вывели его с помощью малых возмущений, опираясь на основное точное уравнение для потенциала скоростей

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \text{grad } \hat{o} \cdot \nabla \right)^2 \hat{o} = \tilde{n}^2 \Delta \hat{o}. \quad (2)$$

При сравнении уравнений (1) и (2) видно, что они оба являются уравнениями гиперболического типа. Если для уравнения (2) можно

выделить семейство плоскостей $t = \text{const}$, то для уравнения (1), аналогичного семейства, вообще говоря, указать нельзя. Плоскости $t = \text{const}$ здесь являются характеристики вида $-\varphi_x \xi^2 + \eta^2 - 2\xi\tau = 0$. (3)

Итак, уравнение (1) было преобразовано [1] в следующее линеаризованное уравнение $-x\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - 2\varphi_{xt} = 0$. (4)

Продифференцировав уравнение (4) по x и приняв, $\varphi_x = u$, получим

$$- [xu_{xx} + u_x] + u_{yy} - 2u_{xt} = 0, \quad (5)$$

которое и будет объектом наших исследований.

Для уравнения (5) поставим следующие начально-краевые условия:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad u(x, y, \infty) = u_1(x, y), \quad (6)$$

$u(x, y, t) = a_*$ - на звуковой линии, где a_* - скорость звука.

(6а) Предположим, что уравнение (5) имеет решение в виде

$$u(x, y, t) = y^k F_0(\xi, t), \quad \xi = xy^{-2}. \quad (7)$$

Тогда определяя необходимые частные производные

$$\begin{aligned} u_x &= y^{k-2} F_{0\xi}, & u_{xx} &= y^{k-4} F_{0\xi\xi}, & u_y &= y^{k-1} [kF_0 - 2\xi F_{0\xi}], \\ u_{yy} &= y^{k-2} [k(k-1)F_0 + (6-4k)\xi F_{0\xi} + 4\xi^2 F_{0\xi\xi}], & u_{xt} &= y^{k-2} F_{0\xi t}, \end{aligned}$$

и подставляя в (5) получим следующее дифференциальное уравнение

$$(1-4\xi)\xi F_{0\xi\xi} + [1+(4k-6)\xi]F_{0\xi} - k(k-1)F_0 + 2F_{0\xi t} = 0. \quad (8)$$

А. Предположим, что решение последнего уравнения можно определить в виде $F_0(\xi, t) = P_0(t)\xi + P_1(t)$. (9)

Действительно, определяя производные и подставляя в уравнение (8), получим

$$\text{а) } P(t) = \frac{2P'_0(t) + P_0(t)}{2}, \text{ при } k=2, \quad \text{á) } P(t) = \frac{2P'_0(t) + P_0(t)}{6}, \text{ иðè } k=3, \quad (10)$$

$P_0(t)$ – произвольная функция, где в качестве примера, можно взять

$$P_0(t) = \frac{m}{(1 - c_1 e^{-2mt})} \quad \text{или} \quad P_0(t) = \frac{1 + c_2 e^{2t}}{1 - c_2 e^{2t}}. \quad (11)$$

Первое решение (10) при $k = 2$ описывает нестационарное течение в сопле Лаваля вида $u(x, y, t) = P_0(t)x + P_1(t)y^2$, (12)

с криволинейной звуковой линией, обращенной навстречу набегающему потоку [3]

$$x = -\frac{2P'_0(t) + P_0(t)}{2P_0(t)} y^2. \quad (12a)$$

Б. Решение уравнения (8) можно найти также в форме квадратного многочлена

$$F_0(\xi, t) = P_0(t)\xi^2 + P_1(t)\xi + P_2(t). \quad (13)$$

Подстановка его в рассматриваемое уравнение, дает

$$P_1(t) = 2[P'_0(t) + P_0(t)], \quad P_2(t) = [2P'_0(t) + 3P''_0(t) + P_0(t)]/6 \quad \text{при } k = 4, \quad (14a)$$

$$P_1(t) = 2[P'_0(t) + P_0(t)]/3, \quad P_2(t) = [4P''_0(t) + 6P'_0(t) + P_0(t)]/20 \quad \text{при } k = 5, \quad (14b)$$

или с учетом (7,13), получим

$$u(x, y, t) = P_0(t)x^2 + P_1(t)xy^2 + P_2(t)y^4 \quad \text{при } k = 4, \quad (15a)$$

$$u(x, y, t) = P_0(t)x^2y + P_1(t)xy^3 + P_2(t)y^5 \quad \text{при } k = 5. \quad (15a)$$

В. Определим решение уравнения (8) в виде полинома произвольной формы $F_0(\xi, t) = P_0(t)\xi^n + P_1(t)\xi^{n-1} + \dots + P_n(t)$, (16)

здесь $k = 2n, k = 2n + 1$, $P_0(t)$ – произвольная функция, а функции

$P_i(t)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= 4[(P'_0(t) + P_0(t)]/(k^2 - 5k + 6), \\ P_2(t) &= 2[2P''_0(t) + 3P'_0(t) + P_0(t)]/(k^2 - k), \\ P_n(t) &= F[n, P_0^{(n)}(t), P_0^{(n-1)}(t), \dots, P_0(t)], \end{aligned} \quad (17)$$

а сама искомая функция запишется как

$$а) \quad u(x, y, t) = P_0(t)x^n + P_1(t)x^{n-1} \cdot y^2 + \dots + P_n(t)y^{2n}, \quad k = 2n, \quad (18a)$$

$$б) \quad u(x, y, t) = P_0(t)x^n y + P_1(t)x^{n-1}y^3 + \dots + P_n(t)y^{2n+1}, \quad k = 2n + 1. \quad (18б)$$

Г. Для решения уравнения (8) поступим следующим образом.

Введем новую переменную $\eta = 4\xi$ и функции

$$F_0(\eta, t) = F(\eta) \cdot F_2(t). \quad (19)$$

Определяя $\frac{\partial F_0}{\partial \xi} = 4F_{0\eta}, \quad \frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi^2} = 16F_{0\eta\eta}, \quad F_{0\eta} = F'(\eta) \cdot F_2(t),$

$$F_{0\eta\eta} = F''(\eta) \cdot F_2(t), \quad F_{0\eta t} = F'(\eta) \cdot F_2'(t)$$

и подставляя в рассматриваемое уравнение, получим при

$F_2(t) = e^{-mt}$ следующее гипергеометрическое уравнение Гаусса [2]

$$(1-\eta)\eta F'' + \left[(1-2m) - \frac{3-2k}{2}\eta \right] F' - \frac{k(k-1)}{4} F = 0, \quad (20)$$

где $\alpha = -\frac{k}{2}, \quad \beta = -\frac{k}{2} + \frac{1}{2}, \quad \gamma = 1-2m,$ т.е. решение последнего уравнения имеет вид [2]

$$F(\eta) = B_1 F_1 \left[-\frac{k}{2}, -\frac{k}{2} + \frac{1}{2}; 1-2m; \eta \right] + B_2 \eta^{2m} \cdot F_2 \left[\frac{-k+4m}{2}, \frac{-k+4m+1}{2}; 1+2m; \eta \right]. \quad (21)$$

Известно, что каждое частное решение может быть представлено в виде полинома (многочлена) при определенных значениях k и m , как в отдельности, так и в общем виде. Первое частное решение при

$-\frac{k}{2} = -n$ и $-\frac{k}{2} + \frac{1}{2} = -n$, когда $n = 0; 1; 2; \dots$ может быть приведено к

многочлену. Второе частное решение при

$\frac{-k+4m}{2} = -n$ и $\frac{-k+4m+1}{2} = -n$, когда $n = 0; 1; 2; \dots$, аналогично

может быть приведено к многочлену, в отдельности. Общее решение (21) также может быть приведено в целом к многочлену при

$k = 2n$, и $k = 2n + 1$, когда $n = 0; 1; 2; \dots$, а m - произвольное число.

Д. Произвольное значение m позволяет получить новые классы решений, поэтому остановимся на некоторых из них.

а) Пусть величина $\gamma = 1 + P$, (P - число натуральное) и в то же время α или β равны $P' + 1$, где $0 \leq P' \leq P$. Тогда, например, при $\alpha = 1 + P'$ получим.

$$F_1 = F_1(-k + 2P', -k + 2P' - P; 1 + P; \eta),$$

$$F_2 = F_2(-k + 2P' - P, -k + 2P'; -2P; 1 - P; \eta). \quad (22)$$

Здесь функция F_2 - является многочленом относительно η^{-1} .

б) Пусть $\gamma = 1 - 2P$, ($2P$ - число натуральное) и в то же время α или β равно целому числу $-P'$, где P' - одно из чисел $0; 1; 2; \dots$. Пусть $\alpha = P'$ тогда искомые решения равны

$$F_1 = F_1(-P, \beta; 1 - P; \eta), \quad F_2 = F_2(-P' + m, \beta + P; 1 + P; \eta). \quad (23)$$

в) Пусть $\gamma = (\alpha + \beta + 1)/2$, тогда имеем следующее решения

$$F_1 = F_1[\alpha, \beta; (\alpha + \beta + 1)/2; \eta], \quad F_2 = F_2[\alpha, \beta; (\alpha + \beta + 1)/2; 1 - \eta]. \quad (24)$$

Если α , β и γ отличны как от нуля так и от целых отрицательных чисел, то решения F_1 и F_2 являются двумя линейно-независимыми решениями геометрического уравнения Гаусса вида

$$F(\eta) = B_1 F_1\left(\frac{-k+1}{2}, \frac{-k}{2}; \frac{-2k+3}{2}; \eta\right) + B_2 \eta^{(1+2k)/2} \left(\frac{k}{2}, \frac{k-1}{2}; \frac{1+2k}{2}; \eta\right). \quad (25)$$

Полученное решение при помощи преобразования вида

$$F_0(2\alpha, 2\beta; \alpha + \beta + 1/2; \eta) = F_0[\alpha, \beta; \alpha + \beta + 1/2; 4\eta/2 - \eta], \quad (26)$$

можно привести в другое решение

$$F(\eta) = B_1 F_1\left[\frac{-k+1}{4}, -\frac{k}{4}; \frac{-2k+3}{2}; 4\eta(1-\eta)\right] +$$

$$+ B_2 \eta^{(1+2k)/2} \cdot F_2\left[\frac{k}{4}, \frac{k-1}{4}; \frac{1+2k}{2}; 4\eta(1-\eta)\right]. \quad (27)$$

Е. Теперь рассмотрим те случаи, т.е. при каких параметрах, решения можно представить в элементарных функциях. Общее решение рассматриваемого уравнения (1) имеет вид (23), а каждое линейное частное решение записываются как

$$F_1\left[-\frac{k}{2}, \frac{-k+1}{2}; 1-2m; \eta\right], \quad (28a)$$

$$\eta^{2m} \cdot F_2\left[\frac{-k+4m}{2}, \frac{-k+4m+1}{2}; 1+2m; \eta\right]. \quad (28б)$$

1а. Сравним решение (28а) с записью вида $F(-n, \beta; \beta; -z) = (1+z)^n$,
(29)

где β – произвольно, тогда из соотношений $\frac{-k}{2} = n$,

$\frac{-k+1}{2} = 1-2m$, $\eta = -z$ находим, $k = 2n$, $n = \frac{4m-1}{2}$ т.е. имеем

$$F_1\left(-\frac{k}{2}, \frac{-k+1}{2}; 1-2m; \eta\right) = F\left(-n, -n + \frac{1}{2}; -n + \frac{1}{2}; \eta\right) = (1-\eta)^n. \quad (30a)$$

1б. Если рассматривать второе линейно-независимое решение (28б), то из сравнения коэффициентов $-k+4m = -2n$, $-k+4m+1 = 2+4m$ получим $m = -(2n+1)/2$,

$$\eta^{2m} F_2\left(\frac{-k+4m}{2}, \frac{-k+4m+1}{2}; 1+2m; \eta\right) = (1-\eta)^n / \eta^{(2n+1)/2}. \quad (30б)$$

2. Теперь сравним решения со следующим выражением

$$F\left(-\frac{n-1}{2}, -\frac{n-2}{2}; \frac{3}{2}; \frac{z^2}{t^2}\right) = \frac{(t+z)^n - (t-z)^n}{2nzt^{n-1}}. \quad (31)$$

2а. Если решение вида (28а) сравнить с выражением (31), то коэффициенты

$k = n-1$, $m = -1/4$, а решение примет вид

$$F_1\left(-\frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{2}; \frac{3}{2}; \eta\right) = \frac{(1+\sqrt{\eta})^n - (1-\sqrt{\eta})^n}{2n\sqrt{\eta}}. \quad (32a)$$

2б. Второе линейно-независимое решение (28б) при $k = n$, $m = 1/4$ запишется

$$\eta^{2m} F_2 \left[-\frac{n}{2}; -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \eta \right] = [(1 + \sqrt{\eta})^2 - (1 - \sqrt{\eta})^2] / 2n. \quad (32б)$$

3. Рассмотрим следующее представление решения гипергеометрического уравнения в элементарной функции

$$F \left(-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{t^2} \right) = \frac{(t + z)^n + (t - z)^n}{2t^n}. \quad (33)$$

3а. При сравнении коэффициентов первого линейно-независимого решения с выражением (33), имеем $k = n$, $m = -1/4$, $z = t\sqrt{\eta}$, т.е.

$$F_1 \left[-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \eta \right] = [(1 + \sqrt{\eta})^n + (1 - \sqrt{\eta})^n] / 2. \quad (33а)$$

3б. А второе решение при $k = n + 1$, $m = 1/4$, запишется

$$\eta^{2m} F_2 \left(\frac{-k + 4m}{2}, \frac{-k + 4m + 1}{2}; 1 + 2m; \eta \right) = [(1 + \sqrt{\eta})^n + (1 - \sqrt{\eta})^n] / 2n. \quad (33б)$$

4. Другое представление запишем как $F(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2) = \ln \frac{1+z}{1-z} / 2z$.
(34)

4а. Наше первое линейно-независимое решение может быть приведено при

$$k = -1, \quad m = -1/4, \quad z = \sqrt{\eta} \quad \text{к виду} \quad F(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; \eta) = \ln \frac{1 + \sqrt{\eta}}{1 - \sqrt{\eta}} / 2\sqrt{\eta}. \quad (34а)$$

4б. А второе решение (28б) при $k = -2$, $m = 1/4$ запишется как

$$\eta^{2m} F_2 \left(\frac{-k + 4m}{2}, \frac{-k + 4m + 1}{2}; 1 + 2m; \eta \right) = \ln \frac{1 + \sqrt{\eta}}{1 - \sqrt{\eta}} / 2. \quad (34б)$$

Укажем еще несколько примеров, когда оба линейно-независимые решения гипергеометрического уравнения могут быть представлены в элементарных функциях при определенных значениях коэффициентов k и m , а также при конкретных соотношениях

между значениями z и η . Эти примеры приведем в табличной форме.

А. Приведем примеры для I-го решения $F_1(-\hat{e}/2, -(k/2) + (1/2); 1 - 2m; \eta)$

Таблица 1.

№	Решение гипергеометрической функции	Представлен элемент. функция	Представлен. функция в переменных η	Значения коэффициентов k, m и значения z
1	$F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -\operatorname{tg}^2 z\right)$	$\frac{z}{\operatorname{tg} z}$	$\frac{\operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} i\sqrt{\eta})}$	$k = -1, m = -1/4,$ $z = \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta},$ $\operatorname{tg} z = i\sqrt{\eta}.$
2	$F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}; \frac{3}{2}; -\operatorname{tg}^2 z\right)$	$\frac{\sin n z \cos^{n+1} z}{n \sin z}$	$\frac{\sin n \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta} \cos^{n+1} \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}}{n \sin \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}}$	$k = n - 1, m = -1/4,$ $z = \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta},$ $\operatorname{tg} z = i\sqrt{\eta}.$
3	$F\left(\frac{-n+1}{2}, \frac{-n+2}{2}; \frac{3}{2}; -\operatorname{tg}^2 z\right)$	$\frac{\sin n z}{n \sin z \cos^{n-1} z}$	$\frac{\sin n \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}}{n \sin \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta} \cos^{n-1} \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}}$	$k = n - 1, m = -1/4,$ $z = \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta},$ $\operatorname{tg} z = i\sqrt{\eta}.$
4	$F\left(-\frac{n}{2}, \frac{-n+1}{2}; \frac{1}{2}; -\operatorname{tg}^2 z\right)$	$\frac{\cos n z}{\cos^n z}$	$\frac{\cos n \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}}{\cos^n \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}}$	$k = n, m = 1/4,$ $z = \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta},$ $\operatorname{tg} z = i\sqrt{\eta}.$
5	$F\left(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; -\operatorname{tg}^2 z\right)$	$\cos n z \cos^n z$	$\cos n \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta} \cos^n \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}$	$k = -n, m = 1/4,$ $z = \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta},$ $\operatorname{tg} z = i\sqrt{\eta}$
6	$F\left(\frac{1}{2}, 1; 2; 4z(1-z)\right)$	$\frac{1}{(1-z)}$	$\frac{2}{(1 \pm \sqrt{\eta})}$	$k = -1, m = -1/2,$ $\eta = 4z(1-z),$ $z = (1 \pm \sqrt{1-\eta})/2.$
7	$F\left(\frac{1}{2}, 1; 1; \sin^2 z\right)$	$\sec z$	$\sec \arg \sin \sqrt{\eta}$	$k = -1, m = 0,$ $z = \arcsin \sqrt{\eta}.$
8	$F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right)$	$\frac{\operatorname{arctg} z}{z}$	$\frac{\operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}}{i\sqrt{\eta}}$	$k = -1, m = -1/4,$ $z^2 = -\eta, z = i\sqrt{\eta}.$

Б. Для второго решения $F_2((-k + 4m)/2, (-k + 4m + 1)/2; 1 + 2m; \eta)$ гипергеометрического уравнения приведем примеры их записей в элементарных функциях при других значениях коэффициентов k и m .
Таблица 2.

№	Решение гипергеометрической функции	Представлен элемент. функция	Представленная функция в переменных η	Значения коэффициентов k, m и значения z
1	$F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -\operatorname{tg}^2 z\right)$	$\frac{z}{\operatorname{tg} z}$	$\operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}$	$k = -0, m = 1/4,$ $z = \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}.$
2	$F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}; \frac{3}{2}; -\operatorname{tg}^2 z\right)$	$\frac{\sin n z \cos^{n+1} z}{n \sin z}$	$i \frac{\sin n \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta} \cos^n \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}}{n}$	$k = -n, m = 1/4,$ $z = \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}.$
3	$F\left(\frac{-n+1}{2}, \frac{-n+2}{2}; \frac{3}{2}; -\operatorname{tg}^2 z\right)$	$\frac{\sin n z}{n \sin z \cos^{n-1} z}$	$i \frac{\sin n \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}}{n \cos^n \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}}$	$k = n, m = 1/4,$ $\operatorname{tg} z = i\sqrt{\eta},$ $z = \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}.$
4	$F\left(-\frac{n}{2}, \frac{-n+1}{2}; \frac{1}{2}; -\operatorname{tg}^2 z\right)$	$\frac{\cos n z}{\cos^n z}$	$i \frac{\cos n \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}}{\sin \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta} \cos \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}}$	$k = n - 1, m = -1/4,$ $\operatorname{tg} z = i\sqrt{\eta},$ $z = \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}.$
5	$F\left(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; -\operatorname{tg}^2 z\right)$	$\cos n z \cos^n z$	$i \frac{\cos n \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta} \cos^{n-1} \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}}{\sin \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}}$	$k = -n, m = 1/4,$ $\operatorname{tg} z = i\sqrt{\eta},$ $z = \operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}.$
6	$F\left(\frac{1}{2}, 1; 2; 4z(1-z)\right)$	$\frac{1}{(1-z)}$	$\frac{2\eta}{(1 \pm \sqrt{\eta})}$	$k = -1, m = -1/2,$ $\eta = 4z(1-z),$ $z_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1-\eta})/2.$
7	$F\left(\frac{1}{2}, 1; 1; \sin^2 z\right)$	$\sec z$	$\sec \operatorname{arcsin} \sqrt{\eta}$	$k = -1, m = 0,$ $z = \operatorname{arcsin} \sqrt{\eta}.$
8	$F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right)$	$\frac{\operatorname{arctg} z}{z}$	$\operatorname{arctg} i\sqrt{\eta}$	$k = 0, m = 1/4,$ $z^2 = -\eta,$ $z = i\sqrt{\eta}.$

Таким образом, при исследовании нестационарного линейного околозвукового уравнения методом автомодельных решений, а также комбинированным решением, были получены классы новых решений, записанных в виде полинома различных степеней.

При $k = 2$ получим течение в сопле Лаваля с криволинейной звуковой линией в самом узком месте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамонтов Е.В. Некоторые вопросы теории нестационарных околозвуковых течений //Динамика сплошной среды. Новосибирск: Наука, Вып.1. - с.61-74.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1971.-576с.
3. Meyer T/ Uber zweidimensionale Bewegungsvar-qunge in einem Gas, dasmit Überschallgesch windig keit stromt, Dissertation, Gottingen, 1908.