

АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ВОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ МЕТОДОМ СРАЩИВАЕМЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Бийбосунов А.И., Бозгунчиев Т.М.

КГНУ им. Ж. Баласагына

Для анализа течения вблизи вогнутой поверхности удобно применять метод сращиваемых асимптотических разложений. В работе Ван-Дайка (1) он был систематически развит и применен к течениям вязкой жидкости. После этого метод сращиваемых асимптотических разложений был применен к множеству проблем механики жидкости и газа. Большая часть ранних приложений относилась к вязким течениям. Например, Жермен и Гиро, а также Чоу и Тинг вычислили влияние кривизны на структуру ударной волны. Меррей определил влияние внешней завихренности на пограничный слой вблизи передней кромки плоской пластины и на большом удалении от нее. Независимо от них Праудмен и Пирсон использовали метод для изучения обтекания сферы и кругового цилиндра при малых числах Рейнольдса. Гольдштейн и Имам дали первое правильное развитие решения Блазиуса для пограничного слоя на полубесконечной плоской пластине. Тинг решил задачу о вязком сдвиговом слое между двумя потоками, движущимися с разной скоростью.

Методу сращиваемых асимптотических разложений свойственна потеря граничных условий. Нельзя ожидать, что внешнее разложение будет удовлетворять условиям, которые наложены во внутренней области, и обратно, внутреннее разложение в общем случае не будет

удовлетворять условиям в удаленной области. Но потеря условий восполняется сращиванием.

Сращивание представляет собой основную черту метода. Возможность сращивания основана на существовании области перекрытия, в которой пригодны как внутреннее, так и внешнее разложения. Используя это перекрытие, можно получить точное соотношение между конечными частными суммами. Реализация этой возможности осуществимо только для возмущения параметра, которое неоднородно в координатах или для возмущения координаты, которое неоднородно по другим координатам. Нельзя срастить два различных параметрических разложения, таких, как разложение для больших и малых значений числа Рейнольдса или числа Маха: невозможно срастить два различных координатных разложения, таких, как разложение для малых и больших значений времени или расстояния. Такие ряды могут перекрываться в том смысле, что они имеют общую область сходимости, но процесс аналитического продолжения дает только приближенное соотношение для некоторого конечного числа членов.

Существование области перекрытия означает, что внутреннее разложение внешнего разложения должно с точностью до соответствующего порядка согласовываться с внешним разложением внутреннего разложения. Этот принцип распространяется на приближения высшего порядка при сохранении дальнейших членов в асимптотических разложениях.

Используется криволинейная ортогональная система координат (X, Y, Z) , где ось X - направлена вдоль вогнутой поверхности в направлении течения, ось Y - по нормали к поверхности, а ось Z - перпендикулярно плоскости (X, Y) . В выбранной системе координат уравнения Навье–Стокса могут быть записаны в безразмерной форме в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1-Ky} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{Kv}{1-Ky} = 0 \quad (1) \\
& \frac{u}{1-Ky} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{Kuv}{1-Ky} + \frac{1}{1-Ky} \frac{\partial P}{\partial x} = \\
& = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{(1-Ky)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{K}{1-Ky} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2K}{(1-Ky)^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{K^2 u}{(1-Ky)^2} \right] \\
& \frac{u}{1-Ky} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{Ku^2}{1-Ky} + \frac{\partial P}{\partial y} = \\
& = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{(1-Ky)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{K}{1-Ky} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2K}{(1-Ky)^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{K^2 v}{(1-Ky)^2} \right] \\
& \frac{u}{1-Ky} \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} = \\
& = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{(1-Ky)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{K}{1-Ky} \frac{\partial w}{\partial y} \right]
\end{aligned}$$

Здесь координаты X, Y, Z отнесены к L , компоненты скорости U, V, W (вдоль осей координат X, Y, Z соответственно) – к U_∞ , давление P – отнесено к ρU_∞^2 (где ρ - плотность жидкости).

Отметим, что в дальнейшем используются только безразмерные переменные (независимые и искомые).

Предполагается, что кривизна вогнутой поверхности:

$$K = L/R = \varepsilon K < 1, \quad K \sim O(1), \quad \varepsilon < \varepsilon < 1$$

т.е. рассматриваются такие течения, когда число Гертлера велико:

$$G_e = 2 R_e^{1/2} L/R \sim O(\varepsilon \varepsilon) > 1$$

Пусть « a », « b » и « c » - характерные толщина, протяженность и ширина пространственной возмущенной вихревой области течения. Очевидно, эти величины должны быть больше характерной длины свободного пробега молекул жидкости $O(\varepsilon^2)$, иначе для исследования течения в областях с характерными размерами:

$$\Delta x \sim O(b), \quad \Delta y \sim O(a), \quad \Delta z \sim O(c)$$

уже нельзя будет использовать уравнения сплошной среды (1), поэтому, также очевидно, справедливо следующее соотношение:

$$\varepsilon^2 < a < c < b < 1$$

Таким образом, схема исследуемого течения характеризует вязкий несжимаемый поток, где для его расчета будет использован метод сращиваемых разложений.

Далее выполняется нелинейный асимптотический анализ уравнений Навье-Стокса для случая гидродинамической неустойчивости течения в поле центробежных сил при больших значениях чисел Рейнольдса и Гертлера.

Тогда уравнения (1) могут быть сведены к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений и тривиальным краевым условиям:

$$\begin{aligned}\beta U_1 + \mathcal{G}_1' + w_1 &= 0 \\ A_1 (\beta Y U_1 + \mathcal{G}_1) &= U'' - U_1 \\ A (\beta Y \mathcal{G}_1 + 2 Y U_1 + \rho_1') &= \mathcal{G}'' - \mathcal{G}_1 \quad (2) \\ A_1 (\beta Y w_1 - \rho_1) &= w'' - w_1 \\ U_1(0) = \mathcal{G}_1(0) = w_1(0) &= 0 \\ U_1(\infty) = \mathcal{G}_1(\infty) = w_1(\infty) &= 0\end{aligned}$$

Сумма порядков последних уравнений равна семи, их можно преобразовать в одно однородное уравнение шестого порядка для функции $\mathcal{G}_1(Y)$. Видно, что (2) – задача на собственные значения: для каждой величины A_1 можно искать одно или несколько значений собственного числа, β , при которых существуют тривиальные решения этой системы уравнений.

Полезно сразу отметить, что в пределе при $A_1 \rightarrow \infty$ уравнения (2) можно свести к одному однородному уравнению второго порядка для функции $U(y)$, например, решение которого выражается через известные полиномы Чебышева – Лагерра и которое имеет дискретный спектр значений собственного числа:

$$\beta_n = \frac{1}{n^2}, n=1,2,3,\dots$$

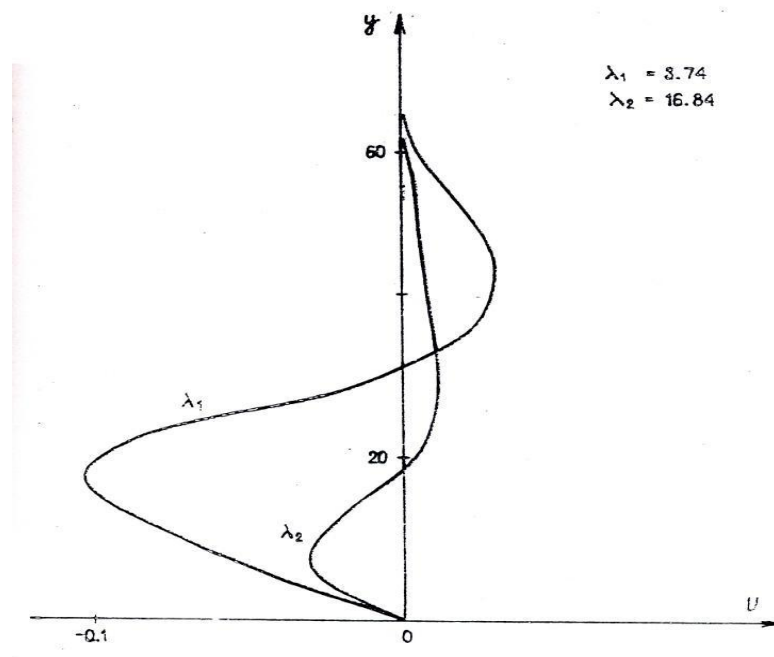
Далее, для численной реализации системы уравнений (2) введем новые обозначения: $U_1 = u$, $A_1 \cdot \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}$; $A_1 \cdot \beta = B$; $2A_1^2 = \lambda$ тогда получатся два дифференциальных уравнения с соответствующими граничными условиями:

$$u'' - (1 + BY) \cdot u = \mathcal{G}$$

$$\mathcal{G}^{IV} - (2 + BY)\mathcal{G}'' + (1 + BY) \cdot \mathcal{G} = -\lambda Yu$$

$$u(0) = u(\infty) = 0 \quad \mathcal{G}(0) = \mathcal{G}'(0) = \mathcal{G}(\infty) = \mathcal{G}'(\infty) = 0$$

Данная система решалась методом прогонки. Для каждого значения инкремента нарастания амплитуды вихрей определялось собственное значение местного числа Рейнольдса. Причем, определялись характеристики первых трех основных вихревых мод. Были получены зависимости компонент скорости от координаты «у», также для трех основных мод.



Основные выводы. В нелинейном приближении численно получены распределения компонент скорости по координате, зависимость местного числа Рейнольдса от инкремента роста амплитуды вихрей для первых трех основных вихревых мод.

Разработаны асимптотические методы решения уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Исследованы краевые задачи гидроаэродинамики применительно к ламинарным оползневым и селевым течениям, а также вопросы перехода ламинарных течений к турбулентным потокам и развития вихрей Гертлера, возникающих в оползневых и селевых течениях. Данные решения могут найти также теоретическое и практическое применение в таких областях, как судостроение, в межлопаточных каналах и гидравлических процессах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике. Москва, изд-во Мир, 1967 г.
2. Peerhossaini H. On the subject of Gortler vortices. Lecture notes in Physics, 1984, ed. S. Zaleski, pp. 376 – 384.
3. Бийбосунов А.И. Неустойчивость в поле центробежных сил при обтекании вогнутой поверхности потоком вязкой сжимаемой жидкости. Материалы Международной научно-практической конференции «Проблемы механики и прикладной математики», посвященной памяти проф. Ф.И. Франкля, г. Бишкек, 1995 г.