

ОБТЕКАНИЕ НЕОГРАНИЧЕННЫМ ПОТОКОМ ПРОНИЦАЕМОГО КЛИНА

Абдылдаев М.Ю, Шамуратов К.Т, Искаков Б.О.

Рассмотрим симметричный клин BCA с углом 2α . Щеки CA и CB считаются проницаемыми. При сделанном выборе осей координат (рис.1) решение задачи упрощается. На поверхностях AD и BD модуль скорости равен модулю скорости набегающего потока V_0 .

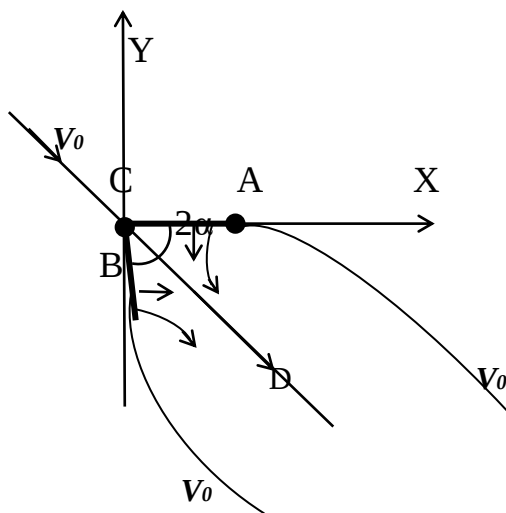


Рис.1. Картина течения в физической плоскости $Z = x + iy$

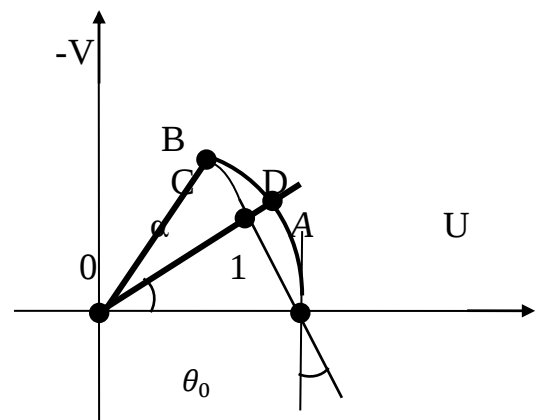


Рис.2. Область течения в плоскости годографа $\zeta = U - iV$

1. Изучения обтекания проницаемых поверхностей представляет большой теоретический и практический интерес [1], однако математическое исследование возникающих задач сопряжено со значительными трудностями. Обзор теоретических и экспериментальных работ по обтеканию проницаемых поверхностей несжимаемой жидкостью содержится в [1].

В настоящей работе получено общее решение задачи в параметрической форме.

2. Проницаемые щеки клина моделируются поверхностями гидродинамических разрывов с граничными соотношениями [2.3]

$$[V(X; +0) = V(X; -0) \equiv V_n]_{CA} \quad (2.1)$$

$$\left| \frac{dw}{dz} \right|_{CB} = \text{const}, \quad (2.2) \quad K * \rho \left| \frac{dw}{dz} \right| = P_1 -$$

$$P_2 \quad (2.3)$$

которые выражают закон сохранения массы и линейный закон протекания жидкости. Перед контуром в потоке течение безвихревое. За проницаемой поверхностью находится зона завихренного течения с прямолинейными линиями тока. Предположение о прямолинейности линий тока за контуром эквивалентно предположению о постоянстве давления во вторичном потоке.

В области безвихревого движения перед контуром справедлив интеграл Бернулли. $\rho(U^2 + V^2) + 2P = \rho V_0^2 + 2P_0$.

Используя (2.3), получаем граничное условие задачи

$$U_1^2 + V_1^2 + 2aU_1 = 1, \quad (2.4)$$

где U_1 и V_1 – безразмерные величины, $a = \frac{K}{V_0}$

Формула (2.4) справедлив для области z_0 , т.е. после преобразование области z к области $z_0 (z_0 = z e^{-i\alpha})$ (рис. 3).

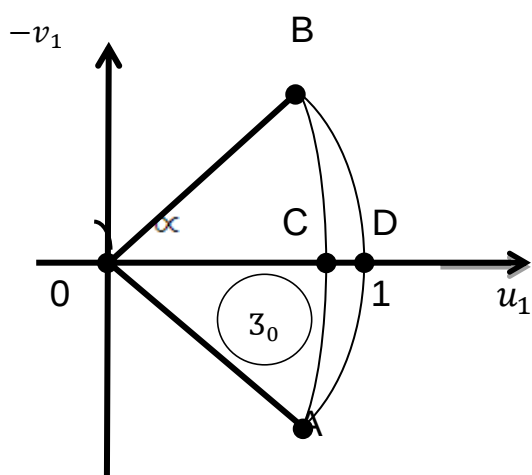


Рис. 3 Область течения в плоскости годографа $z_0 = u_0 - iv_0$

3. В плоскости годографа скорости $\mathfrak{Z}$ области течения соответствует круговой луночке (рис.2). Свободные линии тока AD и BD на которых выполняется условие $u^2 + v^2 = 1$, переходит в дугу единичной окружности, лежащую в первой четверти. Соотношение (2.4) на про-
ницаемых поверхностях равносильно условию:

$(U_1 + a_0)^2 + V_1^2 = (\sqrt{1 + a_0^2})^2$, поэтому линии ВСА соответствует дуга окружности с центром в точке $(-a; 0)$ и радиусом $\sqrt{1 + a_0^2}$, эта окружность пересекает ось U_1 в точке $(\sqrt{1 + a_0^2} - a_0, 0)$.

Введем параметрическую переменную $t = \xi + i\eta$, такую, что в плоскости (t) области течения соответствует верхняя полуплоскость $Im(t) > 0$, а границе области течения соответствует действительная ось ξ (рис.4).

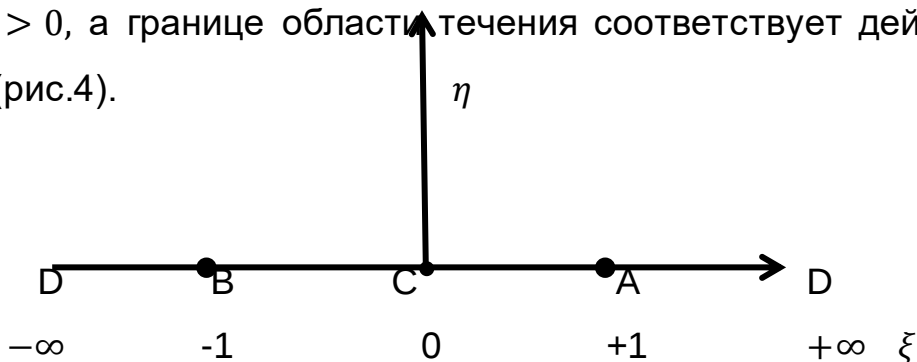


Рис.4 параметрическая плоскость $t = \xi + i\eta$.

Найдем конформное отображение ζ на t с помощью нескольких последовательных конформных отображений [4]:

$$\mathfrak{Z}_1(t) = \frac{\mathfrak{Z} + 1}{\mathfrak{Z} - 1}; \quad \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_1 + ictga; \quad \mathfrak{Z}_3 = \mathfrak{Z}_2 e^{i\lambda_0};$$

$$\mathfrak{Z}_4 = \ln \frac{\mathfrak{Z}_3}{|\mathfrak{Z}_{2c}|}; \quad \mathfrak{Z}_4 = \ln \left\{ \frac{1+t}{1-t} \right\}^\beta \left(\lambda_0 = \frac{\pi}{2} + \theta_0; \beta = \frac{\theta_0}{\pi} \right)$$

Здесь θ_0 – угол между касательными линиями в точке A(B)(рис.2). Отображение $\mathfrak{Z}(t)$ дает формула

$$\mathfrak{Z}(t) = - \frac{1 - ictga + ne^{-i\lambda_0} \left\{ \frac{1+t}{1-t} \right\}^\beta}{1 + ictga - ne^{-i\lambda_0} \left\{ \frac{1+t}{1-t} \right\}^\beta} \quad (3.1) \quad (n = |\zeta_{2c}|)$$

В формуле (3.1) обеспечено нужное соответствие характерных точек границы:

$$3(\pm\infty) = e^{i\alpha}; \quad 3(1) = 1; \quad 3(-1) = e^{i2\alpha}; \quad 3(\pm 0) = \left\{ \frac{V_c}{V_0} \right\} e^{i\alpha}.$$

4. Далее будем искать $Z = Z(t)$. Сначала найдем вспомогательную функцию [4]:

$$\chi(t) = \ln \frac{dz}{dt} = a + ib, \quad (4.1)$$

$$a = \ln \left| \frac{dz}{dt} \right|; \quad b = i \arg \left(\frac{dz}{dt} \right);$$

Найдем $b(t)$ при $t = \xi$ т.е. на действительной оси.

$$DB, \quad -\infty < \xi < -1, \quad b(\xi) = \pi - \alpha + \arg \zeta(\xi),$$

$$BC, \quad -1 < \xi < 0, \quad b(\xi) = \pi - 2\alpha,$$

$$CA, \quad 0 < \xi < 1, \quad b(\xi) = 0,$$

$$AD, \quad 1 < \xi < +\infty, \quad b(\xi) = \pi - \alpha + \arg \zeta(\xi)$$

$$\Lambda(\xi) = \arg 3(\xi) = \arctg \frac{V(\xi, 0)}{U(\xi, 0)}$$

Для упрощения расчета сделаем дополнительное дробно-линейное преобразование верхней полуплоскости t на себя:

$$t \rightarrow w, \quad w = \frac{-t}{t - \frac{1}{2}}, \quad t(w) = \frac{w}{2(w+1)}.$$

Перейдем к модифицированным функциям $\chi_1(w), \Lambda_1(\gamma), \Lambda_2(\gamma)$:

$$\chi(w) = \chi[t(w)], \quad \Lambda_1^*(\gamma) = -K_1 \Lambda_1 \left(\frac{\gamma}{2(\gamma+1)} \right), \quad \Lambda_2^*(\gamma) = -K_2 \Lambda_2 \left(\frac{\gamma}{2(\gamma+1)} \right).$$

$$(K_1 = K_2 = \alpha/\pi)$$

В результате получаем следующую вспомогательную краевую задачу для отыскания в верхней полуплоскости W аналитической функции $\chi_1(w)$ по значению ее мнимой части на действительной оси

$$\begin{aligned} \gamma: \quad & -\infty < \gamma < -2, & b(\gamma) &= 0, \\ & -2 < \gamma < -1, & b(\gamma) &= (\pi - \alpha) + K_1 \Lambda_1^*(\gamma), \\ & -1 < \gamma < -2/3, & b(\gamma) &= \pi + K_2 \Lambda_2^*(\gamma), \\ & -2/3 < \gamma < 0, & b(\gamma) &= \pi - 2\alpha, \end{aligned}$$

$$0 < \gamma < +\infty,$$

$$b(\gamma) = 0.$$

Следовательно функцию $\chi_1(w)$ можно восстанавливать по формуле

Шварца [4]:
$$\chi(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} X_1(\gamma)}{\gamma - W} d\gamma + C = \ln \left\{ \frac{2+w}{w} \frac{2+3w}{2w} \right\}^{\alpha/\pi} \frac{w}{2+w} +$$

$$\frac{a}{\pi} \int_{-2}^{-1} \frac{\Lambda_1^*(\gamma)}{\gamma - W} d\gamma + \frac{\alpha}{\pi} \int_{-1}^{-2/3} \frac{\Lambda_2^*(\gamma)}{\gamma - W} d\gamma + C$$

Используя (3.1)-(4.1), находим иско-
мую функцию $z(t)$ в виде:

$$\begin{aligned} Z(t) = -C_0 \int_0^t \left\{ \frac{1 - \tau^2}{\tau^2} \right\}^{\alpha/\pi} \frac{\tau}{1 + \tau} \exp \left(\frac{\alpha}{\pi} \int_{-2}^{-1} \frac{\Lambda_1^*(\gamma)}{\gamma - W} d\gamma \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{\pi} \int_{-1}^{-2/3} \frac{\Lambda_2^*(\gamma)}{\gamma - W} d\gamma \right) d\tau \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\Lambda_1^*(\gamma) = \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\alpha (2 + 3\gamma)^{2\beta} + \cos \theta_0 (4 + 4\gamma - 3\gamma^2)^\beta}{(2 + 3\gamma)^{2\beta} + 2ctga \cos \theta_0 (4 + 4\gamma - 3\gamma^2)^\beta}$$

.

$$\Lambda_1^*(\gamma) = \Lambda_2^*(\gamma) \quad (4.4)$$

Формулы (3.1) и (4.3) дают общее решение задачи о на бегании плоского потока идеальной несжимаемой жидкости на симметричную плоскую проницаемую поверхность. Положительная действительная постоянная C_0 в (4.3) определяется из условия, что длина щеки клина $|CA| = |CB|$ равна :

$$\begin{aligned} |CA| = l_1 = -C_0 \int_0^{-1} \left\{ \frac{-\tau^2}{\tau^2} \right\}^{\alpha/\pi} \frac{\tau}{1 + \tau} \exp \left(\frac{\alpha}{\pi} \int_{-2}^{-1} \frac{\Lambda_1^*(\gamma)}{\gamma - W} d\gamma \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{\pi} \int_{-1}^{-2/3} \frac{\Lambda_2^*(\gamma)}{\gamma - W} d\gamma \right) d\tau \end{aligned} \quad (4.5)$$

С помощью формуле (3.1) и (4.3) можно вычислить давление в каждой точке области течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х.А., Гувернюк СВ., О постановке задач обтекания проницаемых тел несжимаемой средой// Парашюты и проницаемые тела.М: Изд. МГУ, 1987.
2. Бучин В.А. Решение задачи об обтекании проницаемой пластинки с отрывом струй.//Докл. АН СССР, 1983.Т269.№6.С. 1331-1335.
3. Андронов П.Р, СВ. Гувернюк. Решение задачи о плоской струе, натекающей на бесконечный проницаемый экран// Проблемы современной механики. М: Изд, МГУ ин-т механики 1998.С179-185.
4. Лаврентьев М.А.,Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. М.: Наука 1973. 606с.
5. Гуревич. //Теория струй идеальной жидкости. Гос. изд. физ-мат. Литературы. Москва, 1961 г