

ПЛОСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ СОПЛА ЛАВАЛЯ ДЛЯ ГАЗА ЧАПЛЫГИНА

Дыйканова А.Т, Туганбаев У.М

Кыргызский Национальный аграрный университет им. К.И.Скрябина

В работе методом годографа построено непрерывное плоско-параллельное потенциальное течение идеального газа в сопле Лаваля, для газа Чаплыгина, которое обладает криволинейной звуковой линией перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым.

Данная краевая задача решается методом малых возмущений, причем используются первые три члена разложения. Учет следующих приближений ощутимого вклада не дает.

Линеаризация уравнения Чаплыгина, записанного в форме Томотика-Тамада и краевого условия, была осуществлена на основании групповых свойств дифференциальных уравнений. Решение уравнения найдено в автомоделльной форме.

Известно, что газодинамическое уравнение в плоскости годогра-

фа записывается в виде [2]

$$\begin{aligned}\theta_\varphi &= \sigma_\psi \\ \theta_\psi &= -K(\sigma) \sigma_\varphi\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь φ - потенциал скорости потока, ψ - функция тока, θ - угол наклона вектора скорости потока, $\sigma = k \int_1^q \frac{\rho}{q} dq$, $K(\sigma)$ - безразмерные функции скорости. Исключая угол наклона вектора скорости потока, получаем уравнение $\sigma_{\psi\psi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} [K(\sigma) \sigma_\varphi] = 0$ (2)

Итак ставится следующая краевая задача для двумерного стационарного уравнения (2). Требуется найти решение уравнения (2) со следующими краевыми условиями: $\sigma(\varphi, \psi)|_{\substack{\psi=0 \\ \varphi=0}} = 0$ - в центре сопла,

$$\chi(\varphi, \psi)|_{\psi=\psi_0} = q(\sigma) \sigma_\psi - \text{на стенке сопла,} \quad (3)$$

$$\sigma(\varphi, \psi) = \sigma(\varphi, -\psi) \quad - \text{условие симметричности.}$$

Из групповых свойств дифференциальных уравнений [1] следует, что уравнение (2) и граничные условия (3) допускают однопараметрическую группу преобразований подобия, оставляющих эти уравнения инвариантными самим себе.

Пусть угол наклона вектора скорости θ растягивается как $\theta \Rightarrow \varepsilon^{3/2} \theta$, тогда законы растяжения для φ, ψ, σ и $\chi(\sigma)$ имеют вид

$$\varphi \Rightarrow \varepsilon \varphi, \quad \psi \Rightarrow \varepsilon^{1/2} \psi, \quad \sigma \Rightarrow \varepsilon \sigma, \quad \chi(\sigma) \Rightarrow \varepsilon^{1/2} \chi(\sigma) \quad (*)$$

$$\text{Решение уравнения (2) ищем в форме } \sigma = \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 + \dots \quad (4)$$

Тогда, подставляя предполагаемое решение (4) в уравнение (2) и группируя члены по одинаковым степеням ε , имеем следующие рекуррентные уравнения $\sigma_{0\psi\psi} = (\sigma_0^2)_{\varphi\varphi}$, (5)

$$\sigma_{1\psi\psi} - 2[\sigma_0 \sigma_{1\varphi\varphi} + 2\sigma_{0\varphi} \sigma_{1\varphi} + \sigma_{0\varphi\varphi} \sigma_1] = c_1 (\sigma_0^3)_{\varphi\varphi}, \quad (6)$$

$$\sigma_{2\psi\psi} - 2[\sigma_0 \sigma_{2\varphi\varphi} + 2\sigma_{0\varphi} \sigma_{2\varphi} + \sigma_{0\varphi\varphi} \sigma_2] = (\sigma_1^2 + 3c_1 \sigma_0^2 \sigma_1 + c_2 \sigma_0^4)_{\varphi\varphi}, \quad (7)$$

- - - - -

Соответствующие краевые условия записываются следующим образом: для уравнения (5)

$$\sigma_0(\varphi, \psi)|_{\substack{\psi=0 \\ \varphi=0}} = 0$$

$$\sigma_{0\psi}|_{\psi=\psi_0} = \frac{\chi_0(\varphi, \psi_0)}{a_n} - \text{на стенке сопла} \quad (8)$$

$$\sigma_0(\varphi, \psi) = \sigma_0(\varphi, -\psi) \quad - \text{условие симметричности}$$

для первого приближения (6)

$$\sigma_1(\varphi, \psi)\big|_{\substack{\psi=0 \\ \varphi=0}} = 0,$$

$$\sigma_{1\psi}\big|_{\psi=\psi_0} = \frac{\chi_1(\varphi, \psi_0) - a_n D \sigma_0 \sigma_{0\psi}}{a_n \ell} \quad - \text{ на стенке сопла,} \quad (9)$$

$$\sigma_1(\varphi, \psi) = \sigma_1(\varphi, -\psi) \quad - \text{ условие симметричности}$$

для второго приближения (7)

$$\sigma_2(\varphi, \psi)\big|_{\psi=0} = 0,$$

$$\sigma_{2\psi}\big|_{\psi=\psi_0} = \frac{\chi_1(\varphi, \psi_0) - a_n D (\sigma_0 \sigma_{1\psi} + \sigma_{0\psi} \sigma_1)}{a_n D} \quad - \text{ на стенке сопла,} \quad (10)$$

$$\sigma_2(\varphi, \psi) = \sigma_2(\varphi, -\psi) \quad - \text{ условие симметричности}$$

Подставляя выражения (4) в систему уравнений (1), получаем системы уравнений для определения второй неизвестной функции θ

$$\begin{cases} \theta_{0\varphi} = \sigma_{0\psi} \\ \theta_{0\psi} = (\sigma_0^2)_\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_{1\varphi} = \sigma_{1\psi} \\ \theta_{1\psi} = (2\sigma_0 \sigma_1 + c\sigma_0^3)_\varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} \theta_{2\varphi} = \sigma_{2\psi} \\ \theta_{2\psi} = (\sigma_1^2 + 2\sigma_0 \sigma_2 + 3c_1 \sigma_0^2 \sigma_4 + c_2 \sigma_0^4)_\varphi \end{cases} \quad (11)$$

Решение уравнения (5) ищется в автомодельной форме

$$\sigma_0(\varphi, \psi) = \psi^{n-2} Q_0(\eta), \quad \eta = \varphi/\psi^n, \quad (12)$$

где после подстановки его в уравнение (5) имеем

$$(n^2 \eta^2 - 2Q_0)Q_0'' - [(3n - 5)n\eta + 2Q_0']Q_0' + 2(n - 1)(2n - 3)Q_0 = 0 \quad (13)$$

При $n=2$ получаем следующее точное решение уравнения (13):

$$Q_0(\eta) = a\eta + a^2, \quad (14)$$

$$\text{откуда} \quad \sigma_0(\varphi, \psi) = a\varphi + a^2\psi^2 \quad (15)$$

где a - произвольная постоянная.

Это решение описывает поток в сопле Лавалья при его переходе от дозвуковой скорости к сверхзвуковому в критическом сечении и удовлетворяет краевым условиям (8). Далее находим кривизну сопла

$$\chi(\varphi, \psi)\big|_{\psi=\psi_0} = \frac{a_n a^2}{\gamma + 1} \psi_0 = \text{const}, \quad (16)$$

которое имеет постоянную кривизну.

$$\text{Уравнение звуковой линии записывается в виде} \quad \varphi = -a\psi^2, \quad (17)$$

а для предельных характеристик имеем выражения

$$\varphi = -\frac{a}{2}\psi^2, \quad \varphi = \frac{a}{4}\psi^2. \quad (18)$$

Далее рассматриваются сопла, кривизна которых отличается от кривизны кругового сопла в окрестности критического сечения. Для этого решаются уравнения следующих двух приближений. При этом кривизна кругового сопла и решение околосзвукового приближения принимаются как за главные.

Поскольку однородная часть уравнений (6) и (7) имеет одну и ту же форму, поэтому автомодельный класс решений целесообразно искать сразу для уравнения m -го приближения.

$$\sigma_{m\psi\psi} - 2a[(\varphi + a\psi^2)\sigma_{m\varphi\varphi} + 2\sigma_{m\varphi\psi}] = 0, \quad (19)$$

решение которого ищется в форме

$$\sigma_m(\varphi, \psi) = \psi^{2m+2} f_m(\eta), \quad \eta = \varphi/\psi^2. \quad (20)$$

Подставляя это решение и вводя новую переменную

$\xi = \frac{2}{3a}\eta + 1$, получим гипергеометрическое уравнение Гаусса

$$\xi(1-\xi)Q_m'' + \left[\frac{4m+1}{2}\xi + \frac{1-12m}{6} \right] Q_m' - \frac{(m+1)(2m+1)}{2} Q_m = 0, \quad (21)$$

двумя линейно-независимыми решениями, которого в окрестности особой точки $\xi = 0$ являются следующие функции:

$$Q_{1m}(\xi) = A_m F\left[-(m+1), -\frac{2m+1}{2}, \frac{1-12m}{6}; \xi\right] \quad (22)$$

$$Q_{2m}(\xi) = B_m \xi^{(12m+5)/6} F\left(\frac{6m-1}{6}, \frac{3m+1}{3}, \frac{-12m+11}{6}; \xi\right). \quad (23)$$

Полагая здесь $m=1$, получаем

$$Q_{11} = A_1 F(-2, -3/2, -11/6; \xi) \quad (24)$$

$$Q_{21} = B_1 \xi^{17/6} F(-5/6, 4/3, -1/6; \xi) \quad (25)$$

Второе из решений не удовлетворяет краевому условию, поэтому решение однородной части уравнения (6) записывается

$$\sigma_{10}(\varphi, \psi) = 3\varphi^2 - 6a\varphi\psi^2 - 2a^2\psi^4. \quad (26)$$

Далее найдем частное решение уравнения первого приближения

$$(2\eta^2 - a\eta - a^2)Q_1'' - (5\eta + 2a)Q_1' + 6Q_1 = 3a^3c_1(\eta + a), \quad (27)$$

которое ищется в виде полинома второй степени

$$Q_{11}(\eta) = b_0\eta^2 + b_1\eta + b_2 \quad (28)$$

$$\text{отсюда } \sigma_{11}(\varphi, \psi) = b_0\varphi^2 + b_1\varphi\psi^2 + b_2\psi^4, \quad (29)$$

где $b_1 = 6ab_0 + 3a^3c_1$, $b_2 = \frac{1}{6}(14a^2b_0 + 9a^4c_1)$, a, b_0 - произвольные постоянные.

Значит, решением первого приближения является

$$\sigma_1(\varphi, \psi) = \alpha\sigma_{10}(\varphi, \psi) + \beta\sigma_{11}(\varphi, \psi). \quad (30)$$

Для нахождения решения однородной части второго приближения полагаем в выражении (19) $m=2$, из которого находим одно из линейно-независимых решений, удовлетворяющее граничному условию (10)

$$\sigma_{20}(\varphi, \psi) = 15\varphi^3 - 18a\varphi^2\psi^2 + 60a^2\varphi\psi^4 + 8a^3\psi^6 \quad (31)$$

Для нахождения частного решения имеем следующее уравнение:

$$(2\eta^2 - a\eta - a^2)Q_2'' - (9\eta + 2a)Q_2' + 15Q_2 = b_6\eta^2 + b_7\eta + b_8 \quad (32)$$

откуда его решение записывается

$$Q_{21}(\eta) = D_1\eta^3 + D_2\eta^2 + D_3\eta + D_4, \quad (33)$$

$$\text{где } D_2 = b_6 + 24aD_1, \quad D_3 = \frac{1}{6}(6b_6 + 15a^2D_1 + b_7),$$

$$D_4 = \frac{1}{45}(6ab_6(a+1) + (b_7 + 300a^2D_1)a + 3b_8),$$

D_1 - произвольная постоянная.

$$\text{Тогда } \sigma_{21}(\varphi, \psi) = D_1\varphi^3 + D_2\varphi^2\psi^2 + D_3\varphi\psi^4 + D_4\psi^6 \quad (34)$$

А общее решение второго приближения имеет вид

$$\sigma_2(\varphi, \psi) = \alpha_1\sigma_{20}(\varphi, \psi) + \beta_1\sigma_{21}(\varphi, \psi), \quad (35)$$

которое удовлетворяет граничному условию (10).

Явные виды искоемых функций $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ определяются из системы уравнений (11) и имеют вид

$$\theta_0(\varphi, \psi) = 2a^2\psi(\varphi + \frac{a}{3}\psi^2), \quad (36)$$

$$\theta_1(\varphi, \psi) = \psi \left[b_1\varphi^2 + 4b_2\varphi\psi^2 + \frac{2a^3}{5}(25b_0 + 18a^2c_1)\psi^4 \right], \quad (37)$$

$$\theta_2(\varphi, \psi) = \psi \left[\frac{2D_2}{3}\varphi^3 + 2D_3\varphi^2\psi^2 + 6D_4\varphi\psi^4 + D_5\psi^6 \right]. \quad (38)$$

где
$$D_5 = \frac{1}{7}(2b_1b_2 + 3c_1a^4b_1 + 2a^2b_3 + 2a\ell_4 + a^3(6b_2c_1 + 4a^4c_2)).$$

Далее находятся поправки к кривизне кругового сопла. Первая поправка кривизны находится из краевого условия (9)

$$\chi_1(\varphi, \psi)|_{\psi=\psi_0} = P_1\varphi\psi_0 + P_2\psi_0^3, \quad (39)$$

а вторая из последнего краевого условия (10)

$$\chi_2(\varphi, \psi)|_{\psi=\psi_0} = P_3\varphi^2\psi_0 + P_4\varphi\psi_0^3 + P_5\psi_0^5, \quad (40)$$

Итак, кривизна сопла с учетом трех приближений имеет вид

$$\begin{aligned} \chi(\varphi, \psi)|_{\psi=\psi_0} &= \chi_0 + \varepsilon\chi_1(\varphi, \psi_0) + \varepsilon^2\chi_2(\varphi, \psi_0) + \dots = \\ &= P_0\psi_0 + \varepsilon(P_1\varphi\psi_0 + P_2\psi_0^3) + \varepsilon^2(P_3\varphi^2\psi_0 + P_4\varphi\psi_0^3 + P_5\psi_0^5) + \dots, \end{aligned}$$

(41) где P_i - известные коэффициенты, выраженные через произвольные постоянные a, b_0, D_1 . Здесь $i = 0, \dots, 5$.

$$\text{Задавая стенку сопла в виде } \chi(\varphi, \psi) = g_0 + \varepsilon g_1\sigma + \varepsilon^2 g_2\sigma^2 + \dots, \quad (42)$$

$$\text{Или } \chi(\varphi, \psi) = q_0 + \varepsilon q_1\theta + \varepsilon^2 q_2\theta^2 + \dots, \quad (43)$$

можно определить эти постоянные.

Переход на физическую плоскость осуществляется при помощи формул Чаплыгина

$$dx = \frac{\cos\theta}{q} d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin\theta}{q} d\psi \quad (44)$$

$$dy = \frac{\sin\theta}{q} d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos\theta}{q} d\psi \quad (45)$$

и была построена картина течения в сопле Лавалья на этой плоскости (см.рис.1)

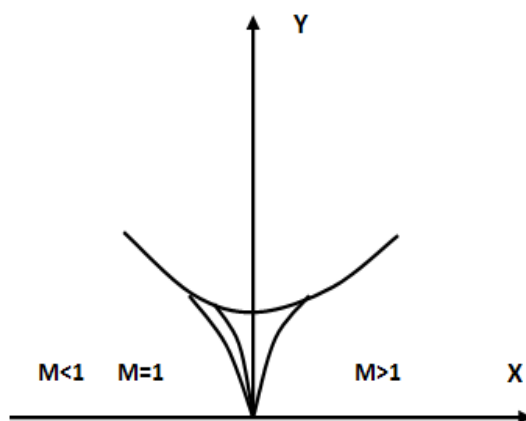


Рис.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.
2. Томотика С., Тамада К. Двумерное смешанное течение сжимаемой жидкости. – В кн.: Механика: ИЛ, 1951, ч.1, вып.6.