

**АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯ  
ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ВОБРАЗЦАХ ИЗ  
ОПТИЧЕСКИ АКТИВНОГО МАТЕРИАЛА**

Аманалиев А.А., Казакбаева Г.О.

ИГиОН НАН КР

Существующие в настоящее время экспериментальные методы определения остаточных напряжений разделяются на механические и физические. Наиболее распространенными и универсальными являются механические методы, основанные на разгрузке объема материала при его освобождении от остаточных напряжений. Разгрузка материала от остаточных напряжений может производиться либо с полным разрушением, либо частичным разрушением объекта исследования.

Физические методы не требуют разрушения исследуемого материала для определения остаточных напряжений, но относительная трудоемкость при изучении физико-механических свойств ограничивает их возможность. Используемым в настоящее время физическим методам определения остаточных напряжений относятся методы: поляризационно-оптический, магнитоупругости, рентгенографический, голографической интерферометрии, акустической эмиссии, ультразвуковой и т.д. Высокая эффективность поляризационно-оптического метода обеспечивается наглядностью и надежностью получаемых результатов, возможность простыми средствами и способами качественного и количественного определения напряжений. Поэтому этот

метод является одним из основных экспериментальных методов исследования остаточных напряжений.

В виду проблем определения остаточных напряжений в массиве горных пород и трудностей возникающие при аналитическом решении задач связанных с остаточными напряжениями, актуальными становятся вопросы разработки комбинированных экспериментально-расчетных методов решения таких задач. В этих методах, на базе полученных экспериментальных данных измерения остаточных напряжений строятся расчеты по определению напряжений на основе известных теорий и численных методов, которые затем проверяются экспериментально и выбираются оптимальные параметры для конкретных объектов[1].

Для проведения экспериментальных исследований остаточных напряжений были изготовлены из оптически активного материала по известной методике и технологии, образцы в форме правильного параллелепипеда, моделирующие образцы горных пород [2, 3].

Экспериментальные данные по оптическому моделированию распределения остаточных напряжений в образцах были представлены через главные нормальные и максимальные касательные напряжения[2]. Для анализа и последующего использования этих данных при математическом моделировании необходимы горизонтальные и вертикальные компоненты нормальных напряжения и касательные напряжения. Так как горизонтальные и вертикальные нормальные напряжения вычислены в результате обработки данных эксперимента, то остается вычислить касательные по известным выражениям. Нами для этого использована следующая формула, по которой определяется и знак касательных напряжений[2]:

$$\tau_{xy} = \tau_{max} \sin 2\alpha,$$

где  $\alpha$  - угол главного направления, определяемый в ходе эксперимента.

После статистической обработки опытных данных мы получаем результаты в виде таблиц или графиков. Во многих случаях ставятся задачи определить на основе полученных таблиц или графиков аналитическое выражение аппроксимирующую (или интерполирующую) функцию для опытных данных. Наиболее распространенным является в этом случае приближение по методу наименьших квадратов с использованием полинома или тригонометрических функций. Экспериментальные данные это в основном дискретные величины. Поэтому, для получения на их основе функциональных зависимостей и последующего математического анализа, применение формул Бесселя позволяет перейти от дискретных значений эксперимента к приближенным математическим функциям, разложенных в ряды Фурье. При этом, средняя квадратическая ошибка равной  $\delta^2 = \frac{1}{T} \int [f(x) - S_n(x)]^2 dx$  будет наименьшей.

При исследовании в лабораторных условиях поляризационно-оптическим методом моделирования образцов из твердого оптически активного материала с остаточными напряжениями [3], были получены величины главных и максимального касательного напряжений, в виду специфики метода, по горизонтальной и вертикальной сечениям вдоль осей симметрии образца. Для анализа были выбраны однородные образцы из оптически активного материала с остаточными напряжениями. Математическая обработка лабораторных данных и их последующий анализ проведены с использованием приближенного гармонического анализа в виду периодического изменения величин напряжений, полученных экспериментальным путем[5].

По данным для 14 однородных образцов с остаточными напряжениям [3], были вычислены коэффициенты рядов Фурье  $a_0$ ,  $a_k$  и  $b_k$  ( $k=1, 2, \dots, 13$ ) на основе формул Бесселя[4, 5]:

горизонтальное сечение

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x), \\ \sigma_y &= \frac{\bar{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\bar{a}_k \cos k\omega x + \bar{b}_k \sin k\omega x), \\ \tau_{xy} &= \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\widetilde{a}_k \cos k\omega x + \widetilde{b}_k \sin k\omega x),\end{aligned}\tag{1}$$

вертикальное сечение

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^m (\alpha_j \cos j\omega y + \beta_j \sin j\omega y), \\ \sigma_y &= \frac{\bar{\alpha}_0}{2} + \sum_{j=1}^n (\bar{\alpha}_j \cos j\omega y + \bar{\beta}_j \sin j\omega y), \\ \tau_{xy} &= \frac{\widetilde{\alpha}_0}{2} + \sum_{j=1}^n (\widetilde{\alpha}_j \cos j\omega y + \widetilde{\beta}_j \sin j\omega y).\end{aligned}\tag{2}$$

где  $a_0, a_k, b_k, \bar{a}_0, \bar{a}_k, \bar{b}_k, \widetilde{a}_0, \widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k$  – соответствующие коэффициенты ряда Фурье по горизонтальному сечению,  $\alpha_0, \alpha_j, \beta_j, \bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_j, \bar{\beta}_j, \widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\beta}_j$  – по вертикальному сечению,  $\omega$  и  $\omega$  – круговые частоты по длине и высоте образца соответственно.

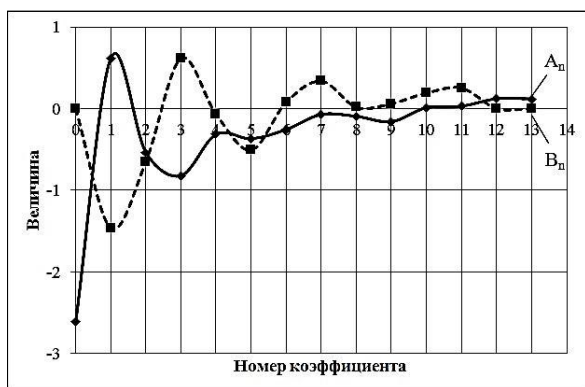
По описанной в [5] методике, составлена программа расчета на языке Паскаль. Для проверки точности полученных результатов, были построены графики исходных и расчетных данных. Эти графики совпадают во всех точках.

Для анализа более наглядное представление имеют отображение полученных данных в виде графиков. Ниже приводятся графики

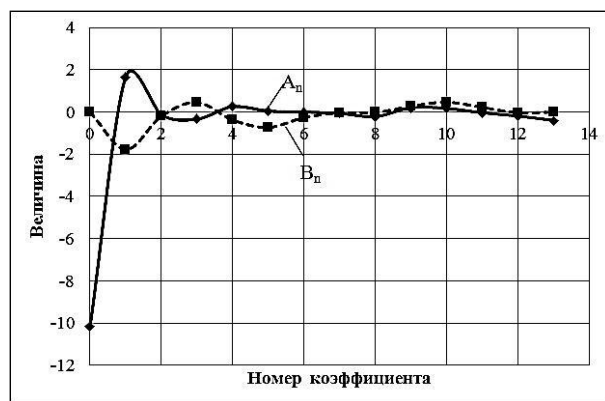
средних величин коэффициентов  $a_0$ ,  $a_k$  и  $b_k$  рядов Фурье для компонентов напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  по горизонтальному и вертикальному сечениям. Из рисунка 1 видно, что наибольшее значение по абсолютной величине имеет коэффициент  $a_0$ , при этом максимальное значение равно 13,6, а минимальное – -30,92, т.е. разброс значений 44,52. Среднее значение по 14 данным равно -2,61. По мере увеличения порядка коэффициента значение по абсолютной величине уменьшается в среднем до  $a_7 = -0,071$ , а затем после небольшого роста, наименьшего значения достигает при коэффициенте  $a_{10} = 0,013$ .

По формулам (1, 2) значение коэффициентов  $b_0$  и  $b_k$  равны нулю, поэтому наибольшего по абсолютной величине значение принимает коэффициент  $b_2$ , которая равна -1,463. Далее по мере увеличения порядка коэффициента, если рассматривать коэффициенты до  $b_{10}$ , так как в последующих коэффициентах уменьшается общее число варьируемых величин, то минимального значения по среднему, достигается при коэффициенте  $b_8 = 0,018$ .

Из рисунка 1 следует, что для приближенного анализа  $\sigma_x$  по горизонтальному сечению достаточно взять до восьмых коэффициентов, потому что  $b_8 = 0,018$  и далее коэффициенты при  $b_k$  незначительно растут и начинают колебаться вокруг нуля. Последний коэффициент  $b_k$  должен быть равен нулю согласно формулам (1, 2), тогда если принят  $b_8 = 0$ , то погрешность при этом составит 1,8%. а для  $a_8$  – 2,3%.



$\sigma_x$



$\sigma_y$

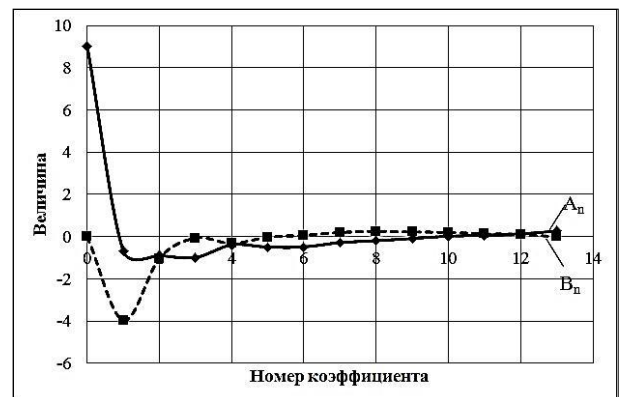


Рис 1. Коэффициенты ряда Фурье по горизонтальному сечению.

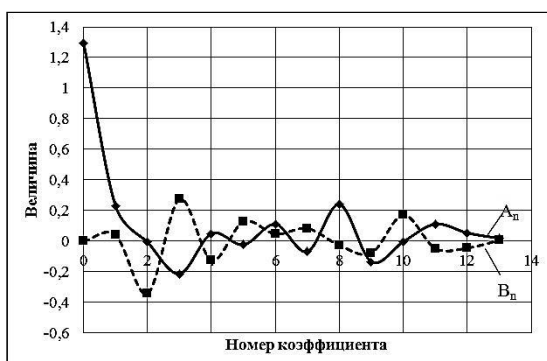
$\tau_{xy}$



$\sigma_x$



$\sigma_y$



$\tau_{xy}$

Рис. 2. Коэффициенты ряда Фурье по вертикальному сечению.

Для проверки данного предположения рассмотрим рисунки с графиками для остальных компонент напряжения по обоим сечениям. Из рисунков 1 и 2 видно, что коэффициенты  $b_8$  для компонент напряжений по обоим сечениям очень близки к нулю и колебания значений как по  $b_k$ , так и по  $a_k$  начинают затухать. После  $a_8$  и  $b_8$ , они начинают расти, хотя и незначительно.

По горизонтальному сечению коэффициенты  $a_0$  для  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  имеют отрицательные значения, тогда как по вертикальному они положительны. Остальные  $a_k$  колеблются в интервале  $[-2, 2]$  постепенно приближаясь к нулю для  $a_7$  ( $a_8$  для  $\sigma_y$  по вертикальному сечению), а затем начинают незначительно расти. Коэффициенты  $b_k$  этих компонент по обоим сечениям колеблются в интервале  $[-4, 1]$ , принимая максимальное значение по абсолютной величине при коэффициентах  $b_1$ . При этом, наоборот для  $a_0$ , эти значения положительны по горизонтальному сечению и отрицательны по вертикальному.

Характерен для этих графиков и поведение коэффициентов  $a_1$ , которые принимают наибольшие значения после коэффициентов  $a_0$  и противоположны им по знаку, т.е. если  $a_0$  имеет максимум по графику, то  $a_1$  имеет минимум и наоборот. Для тангенциальных напряжений при максимальном значении  $a_0$  минимум достигается при  $a_3$ .

Коэффициенты  $a_0$  для тангенциальных напряжений по обоим сечениям положительны и приблизительно равны по значениям,  $a_0 \approx 1,2$  (горизонтальное сечение) и  $a_0 \approx 1,25$  (вертикальное сечение). Далее коэффициенты  $a_k$  колеблются в интервале значений  $[-0,5; 0,3]$ , а коэффициенты  $b_k$  –  $[-0,4; 0,2]$ . Коэффициенты  $b_k$  достигают экстремумов при различных значениях. По горизонтальному сечению максимум при  $b_7$ , минимум при  $b_9$ , а по вертикальному максимум при  $b_3$ , минимум при  $b_2$ .

По характеру поведения коэффициенты ряда Фурье для тангенциальных напряжений резко отличаются от характера поведения для нормальных напряжений. Большие колебания значений имеются как в начале, так и в конце.

На основе вышесказанного можно заключить, для анализа экспериментальных данных, имеющее большое количество экстремумов и большую величину разности между ближайшими наибольшими и наименьшими значениями данных результативно использование гармонического анализа [1, 2]. Из анализа коэффициентов ряда Фурье,

найденным по экспериментальным данным для однородных образцов, следует, что для приближенного анализа можно усечь ряд Фурье до  $a_8$  и  $b_8$ , после которых значения коэффициентов по абсолютной величине начинают снова расти. Коэффициенты  $a_0$  для тангенциальных напряжений по обоим сечениям принять равными по значениям.

Функция напряжений  $F(x,y)$ , в этом случае, может быть выражена через суммы тригонометрических функций аргументов  $x$  и  $y$ , следующего вида:

$$F(x,y) = S_n(x) \times C_m(y) + q(x,y) = \left[ \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos k\omega x + B_k \sin k\omega x) \right] \times \\ \times \left[ \frac{\bar{A}_0}{2} + \sum_{j=1}^m (\bar{A}_j \cos j\omega y + \bar{B}_j \sin j\omega y) \right] + \frac{d_1}{2} x^2 + d_2 xy + \frac{d_3}{2} y^2$$

где  $q(x,y)$  – полиномы, уточняющие выражения для компонент напряжений, найденных через функцию напряжений,  $A_0, A_k, \bar{A}_0, \bar{A}_k, B_k, \bar{B}_k$ , – коэффициенты одинарного ряда вида (1) и (2). Тогда выражения для определения компонент напряжений принимают простой вид

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} = - \left[ \sum_{k=1}^n k^2 \omega^2 (A_k \cos k\omega x + B_k \sin k\omega x) \right] \times \\ \times \left[ \frac{\bar{A}_0}{2} + \sum_{j=1}^m (\bar{A}_j \cos j\omega y + \bar{B}_j \sin j\omega y) \right] + d_1,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = - \left[ \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos k\omega x + B_k \sin k\omega x) \right] \times \\ \times \left[ \sum_{j=1}^m j^2 \omega^2 (\bar{A}_j \cos j\omega y + \bar{B}_j \sin j\omega y) \right] + d_3$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = - \left[ \sum_{k=1}^n k \omega (B_k \cos k\omega x - A_k \sin k\omega x) \right] \times$$

$$\times \left[ \sum_{j=1}^m jw(\bar{B}_j \cos jwy - \bar{A}_j \sin jwy) \right] - d_2,$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аманалиев А.А. Математический метод расчета по экспериментальным данным напряженного состояния твердых тел с остаточными напряжениями. – Бишкек, Сб. «Современные проблемы механики сплошной среды», Вып. №13//Труды Межд. конф. «Проблемы геомеханики и освоения недр», 2011, С. 368-375.
2. Р.И. Хаимова-Малькова. Методика исследования напряжений поляризационно-оптическим методом. Изд. «Наука», Москва. 1970. С.114.
3. Г.О. Казакбаева, Ж.Д. Рабидинова. Остаточные напряжения в твердых средах и регулирование их уровня при термообработке. // Известия КГТУ им. И. Раззакова, № 11. Бишкек, 2007г.
4. Бронштейн И.И., Семендяев К.Л. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов.- М., Гостехиздат, 1960.- 608 с.
5. Аманалиев А.А. Применение рядов Фурье в исследовании распределения остаточных напряжений в твердых телах//Известия НАН КР, №2, Бишкек, Илим, 2011. С. 97-100.