

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ГЛИССИРУЮЩЕЙ ПРОНИЦАЕМОЙ ПЛАСТИНКЕ

Абдылдаев М. Ю., Шамуратов К. Т., Искаков Б. О.

Рассматривается боковое растекание и протекание потока идеальной несжимаемой жидкости при взаимодействии с проницаемой глissирующей бесконечной поверхностью. Рассматриваемая задача была решена нами, когда глissирующая пластинка расположена, перпендикулярна к поверхности жидкости [4]. В данной работе рассматривается более общий случай, т.е. глissирующая пластинка наклонена к поверхности жидкости под углом α_0 (α_0 – угол атаки).

Исследование обтекания жидкости через проницаемую поверхность представляет большой теоретический и практический интерес [2], однако математическое изучение возникающих задач сопряжено со значительными трудностями.

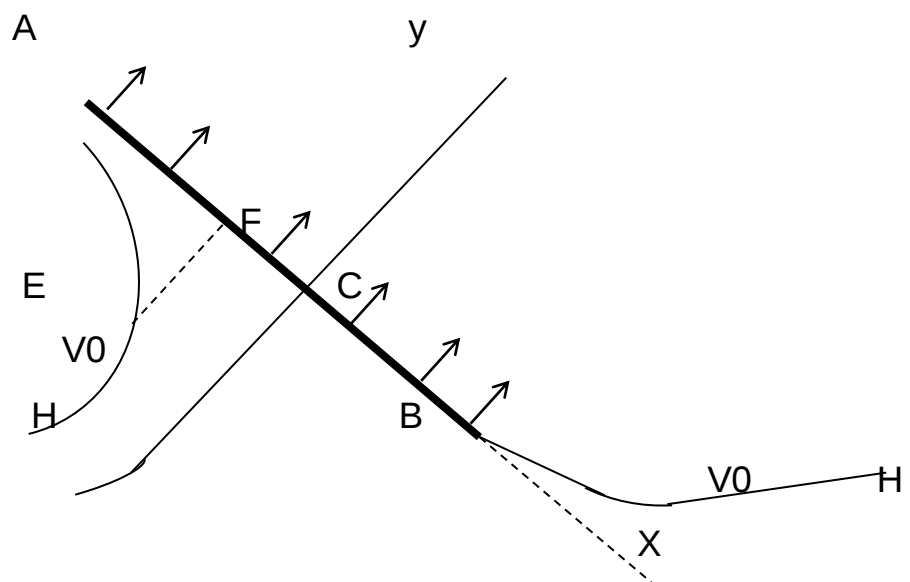


Рис.1 Картина течения в физической плоскости $z = x + iy$

Пусть поток со свободной поверхностью набегаёт на бесконечную проницаемую пластинку (Рис.1), установленную у поверхности потока. Нас будет интересовать только нахождение W и $dw/(v_0 dz)$ в параметрической форме [1]. Для решения задачи отобразим области изменения $\zeta = dw/(v_0 dz)$ на верхней полуплоскости параметрического переменного t ($Jmt \geq 0$) (Рис.3). Для нахождения W (комплексный потенциал течения) используется метод особых точек С.А. Чаплыгина [1].

Встретившись с пластинкой, поток раздваивается и растекаясь перед пластинкой в поперечных направлениях и полностью или частично просачивается через него. Проницаемый контур моделируется поверхностью гидродинамического разрыва с граничными соотношениями вида [2]:

$$V(x+0) = V(x-0) \equiv V_n \quad (1)$$

$$K \cdot pV_n = P(x-0) - P(x+0) \quad (2)$$

$$U(x+0) = 0 \quad (3)$$

Эти соотношения выражают закон сохранения массы, линейный закон протекания и свойство контура гасит касательную составляющую импульса в пересекающих его жидких частицах.

На поверхностях струи AEN и BH модуль скорости равен модулю скорости набегающего потока V_0 . Зона постоянного давления за проницаемой пластинкой простирается в бесконечность.

Рассматривается следующая схема течения. Перед пластинкой в потоке ($y < 0$) течение безвихревое. За проницаемой поверхностью ($y > 0$) находится зона завихренного течения с прямолинейными линиями тока. Предположение о прямолинейности линий тока за пластинкой эквивалентно предположению о постоянстве давления во вторичном потоке.

В области безвихревого движения ($y < 0$) перед контуром справедлив интеграл Бернулли $\rho(u^2 + v^2) + 2\rho = \rho u_\infty^2 + 2\rho_\infty$. Исходя из вышеизложенных условий, получаем граничное условие[2]:

$$(u^2 + v^2) + 2av = 1 \quad (4)$$

где u, v – безмерные величины, $a = k/u_\infty (u_\infty = v_0)$.

Пусть $z = x + iy$ – комплексная координата точки в физической плоскости,

$\zeta = dw/(v_0 dz) = u - iv$; – комплексная скорость течения. Для функции $\zeta(z)$ в области течения $HBCA$ имеются следующие краевые условия: на HC – условие непроницаемости $u = 0$ (следствие симметрии), на ACB соотношение (4) для проницаемой границы, на свободных линиях тока BH и HEA – условие постоянства давления, которое эквивалентно условию $u^2 + v^2 = 1$.

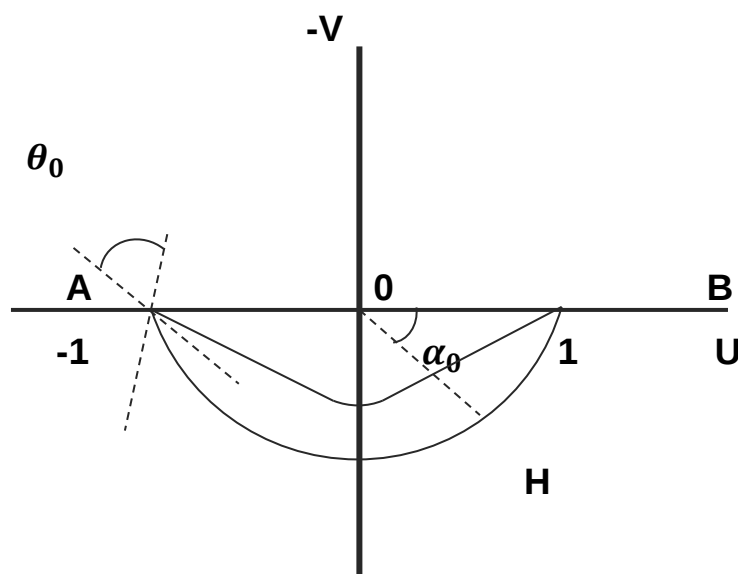


Рис.2 Область течения в плоскости годографа $\zeta = u - iv$

Построим решения в области безвихревого движения. В плоскости годографа скорости $\zeta = u - iv$ области течения соответствует круговая луночка (Рис.2). Свободные линии тока BH и AH , на которых выполняется условие $u^2 + v^2 = 1$, переходят в дугу единичной окружности,

лежащую в нижней половине плоскости ζ . Соотношение (4) на проницаемой поверхности равносильно условию $(v + a)^2 + u^2 = (\sqrt{1 + a^2})^2$, поэтому линии ACB соответствует дуга окружности с центром в точке $(0; a)$ и радиусом $R = (\sqrt{1 + a^2})^2$, эта окружность проходит через точки с координатами $(\pm 1, 0)$ и пересекает ось v в точке $(0, a + \sqrt{1 + a^2})$ (Рис.2).

Введем параметрическую переменную $t = \xi + in$, такую, что в плоскости t области течения соответствует верхняя полуплоскость $\text{Im} t > 0$, а границе области течения $HBCA$ соответствует действительная ось ξ . Конформное отображение $\zeta \rightarrow t$ осуществляется с помощью нескольких последовательных конформных отображений [1,3] и она дается формулой:

$$\zeta = \frac{v}{v_0} e^{-i\theta}; \zeta_1 = -\zeta; \zeta_2 = \frac{1}{\zeta_1 - 1}; \zeta_3 = \zeta_2 + \frac{1}{2}; \zeta_4 = \zeta_3 e^{i\lambda_0};$$

$$\zeta_5 = 2\zeta_4; \zeta_6 = (\zeta_5)^{\pi/\theta_0}; \zeta_6 = \frac{(1+t)}{(1-t)}; \lambda_0 = \theta_0 + \frac{\pi}{2} \quad (4a)$$

$$\zeta(t) = - \left\{ 1 - \frac{2e^{i\lambda_0}}{e^{i\lambda_0} - \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\alpha/\pi}} \right\}; \quad (5)$$

Здесь θ_0 – угол между касательными линиями к окружностям в точке $A(B)$ (Рис.2). Легко убедиться в правильности формулы (5).

Обеспечено нужное соответствие характерных точек границы:

$$\zeta(1) = -1; \quad \zeta(-1) = 1; \quad \zeta(-h) = e^{-i\alpha_0}; \quad \zeta(0) = -ir;$$

$$(r = v_H/v_0)$$

В предельном течении, т.е., при $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\lambda_0 = \pi$, имеем задачу о глиссирующей непроницаемой пластинке [1]:

$$\frac{dw}{v_0 dz} = -\frac{1}{t} + i \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t}; \quad (6)$$

Найдем теперь функцию $w(t)$.

Комплексный потенциал w имеет логарифмические особенности в точках H и A , соответствующих бесконечно удаленным точкам струи. Поэтому производная dw/dt имеет полюсы в точках $t = -h$ и $t = 1$.

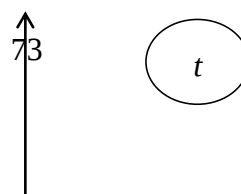




Рис. 3. Параметрическая плоскость $t = \zeta + i\eta$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{N}{(t+h)^2} + \frac{\delta v_0}{\pi} * \frac{h+1}{(1-t)(t+h)} \quad (7)$$

Так как $\frac{dw}{dt} = 0$ в точке $C(t = 0)$, то из этого условия находится постоянная:

$$N = \frac{\delta v_0}{\pi} h(1+h) \quad (8)$$

Таким образом, для комплексного потенциала можно записать формулу в виде:

$$W(t) = \frac{\delta v_0}{\pi} \left[\frac{h(h+1)}{(t+h)} - \ln \left(\frac{(1-t)}{t+h} \right) \right] \quad (9)$$

Формулы (5) и (9) дают общее решение задачи в параметрической форме. Из (5) и (9) имеем:

$$dz = dx + i dy = \frac{\delta}{\pi} \frac{1}{\zeta} \frac{(1+h)*t}{(t+h)^2} dt \quad (10)$$

С помощью формулы (5) можно найти направление набегающего потока в бесконечности.

Совершая обход по бесконечно малой полуокружности вокруг точки $t = -1$ (точка B) против часовой стрелки найдем, что на участке BH :

$$\frac{dw}{v_0 dz} = e^{-i\theta} = \frac{1-A^2\gamma}{1-2A\gamma\cos\lambda_0+A^2\gamma} - i \frac{1-2A\gamma\sin\lambda_0}{1-2A\gamma\cos\lambda_0+A^2\gamma} \quad (11)$$

$$\text{Здесь } \lambda_0 = \theta_0 + \frac{\pi}{2}; \quad \gamma = \frac{\theta_0}{\pi}; \quad A = \frac{(1+t)}{(1-t)};$$

Угол наклона к оси X на свободной поверхности BH равен:

$$\theta = \arctg \frac{v(t)}{u(t)} \quad (12)$$

$$\text{Где } \begin{cases} U = \frac{(t-1)^{2\gamma} - (t+1)^{2\gamma}}{(t-1)^{2\gamma} - (t+1)^{2\gamma} - 2\cos\lambda_0 * (t^2-1)^\gamma * e^{i\theta_0}} \\ V = \frac{2(1+t)^{2\gamma} * \sin\lambda_0}{(t-1)^{2\gamma} - (t+1)^{2\gamma} - 2\cos\lambda_0 * (t^2-1)^\gamma * e^{i\theta_0}} \end{cases} \quad (13)$$

В предельном случае ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\lambda_0 = \pi$) имеем:

$$\theta = \operatorname{arctg} \sqrt{t^2 - 1}$$

В бесконечно удаленной точке $Ht = -h$, откуда угол наклона вектора скорости к оси X в бесконечности равен:

$$\theta_\infty = \operatorname{arctg} \frac{v(h)}{u(h)} \quad (14)$$

Этот угол является углом атаки α_0 пластинки:

$$\alpha_0 = \theta_\infty$$

Расчеты сопротивления подъемной силы и положения центра давления на глиссирующей пластинке будут рассмотрены в следующих работах авторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.И. Гуревич. Теория струй идеальной жидкости. Изд.: Физ-мат литературы М: 1961
2. Рахматулин Х.А., Гувернюк С.В. О постановке задач обтекания проницаемых тел несжижаемой средой // Парашюты и проницаемые тела. М: Изд-во МГУ. 1987. С.5-24
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Наука 1973. 606с.
4. Абдылдаев М. Ю., Шамуратов К. Т. Решение задачи о плоской проницаемой глиссирующей пластинке. Материалы международной научно-прак. Конференции «Наука и ее роль в современном мире» Том 5. Казахстан, Караганда 2011 г.